时变最优的增强型比例导引及其脱靶量解析解

王 辉[1,2],林德福[2],祁载康[2],张 頔[2]

(1. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院,北京 100191; 2. 北京理工大学 宇航学院,北京 100081)

摘 要:以 time-to-go 为基础建立时变的目标罚函数,根据最优控制理论,推导了对常值机动目标时变最优的增强型比例导引律;对权函数指数的分析结果表明,增强型比例导引有效导航比与权函数的指数一一对应。对增强型比例导引有效导航比的工程取值范围给出了合理的理论解释。将制导动力学简化为一阶滞后,并将导引头初始瞄准误差、目标常值机动引入到制导系统中,根据伴随法的数学思想,研究了增强型比例导引制导系统在初始瞄准误差、目标常值机动作用下的脱靶量解析解,最后通过伴随系统的数学仿真对解析解的正确性进行了验证。

关键词:增强型比例导引; 剩余飞行时间; 伴随法; 脱靶量

中图分类号:TJ765.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-2276(2013)03-0692-07

Time-varying optimal augmented proportional navigation and miss distance closed-form solutions

Wang Hui[1,2], Lin Defu[2], Qi Zaikang[2], Zhang Di[2]

(1. School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;
2. School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: The optimal augmented proportional navigation for a constant maneuver target was deduced using optimal control theory based on the cost function weighted by a power of time-to-go. The analysis of the exponential of the weighted function shows that there exists a bijection between the navigation ratio and the exponential which gives a reasonable theoretical explanation for the engineering value of the APN navigation ratio. The seeker heading error and a constant maneuver target was introduced into the augmented proportional navigation guidance system while the guidance dynamics was simplified as a single lag. According to the mathematic thought of the adjoint method, the miss distance of the APN guidance system with a single-lag was studied and the closed-form solutions of which were deduced when the heading error and the constant maneuver target enters into the system and the miss distance closed-form solutions was validated through the simulation of the adjoint guidance system.

Key words: augmented proportional navigation; time-to-go; adjoint method; miss distance

收稿日期:2012-07-05; **修订日期**:2012-08-03

基金项目:国家自然科学基金(61172182)

作者简介:王辉(1984-)男,博士后,主要从事飞行器制导与控制方面的研究。Email:wh20031131@126.com

0 引　言

传统的比例导引律及增强型比例导引律的研究已经比较广泛[1-5],其目标罚函数一般定义为“使加速度平方的积分最小”, 得到的最优导航系数 **N** 为 3。Chang-Kyung Ryoo, Ernest J. Ohlmeyer 等人在研究扩展最优弹道成型制导律时将目标罚函数由传统的“使加速度平方的积分最小”扩展为“使加速度平方与剩余飞行时间的 **n** 次方的倒数的乘积的积分最小”,进而得到时变最优的弹道成型制导律[6-7]。将类似的方法引入到增强型比例导引的研究中, 可扩展得到时变最优的增强型比例导引。

不管导弹制导系统采用的何种制导律, 制导精度都是制导系统工程师非常关心的一个关键性能指标,通常用脱靶量大小来衡量。传统的制导精度评估办法是给定系统未知参数,采用 Monte Carlo 仿真试验来分析[8],但当需要研究导引头角噪声或目标闪烁噪声等对制导系统脱靶量的影响时, 采用 Monte Carlo 法就显得过于繁琐且费时[2,8-9];另一种较简便的方法是伴随法,构造相应的伴随模型,一次仿真即可得到随末导时间变化的脱靶量[1]。上述两种方法均需构造正确的制导系统模型, 并辅以相应的数学仿真才能得到最终结果。这就要求制导系统工程师熟练掌握相应的制导系统模型及数学仿真方法才能展开相关工作[1-2]。

文中利用最优控制理论, 根据扩展的目标罚函数, 推广得到对常值机动目标时变最优的增强型比例导引律;同时,根据“伴随法”的数学思想,将制导动力学简化为一阶滞后, 推导得到在导引头初始瞄准误差、目标常值机动作用下的脱靶量解析解,并利用伴随法进行了数学仿真, 验证了所推导的脱靶量解析解的正确性。文中的脱靶量解析研究能够在一定的假设前提下直接给出脱靶量和末导时间的关系, 使制导系统工程师能方便快捷地对制导系统的脱靶量进行估算。

1 时变最优增强型比例导引律的理论推导

1.1 模型建立及理论推导

考虑常值机动目标的制导系统状态方程可表述为:

$$\dot{X}=AX+Bu=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_M\\\dot{y}_M\\a_T\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}u \tag{1}$$

其中

$$X=[y_M\ \ \dot{y}_M\ \ a_T]^T \tag{2}$$

$$X_0=[y_{M0}\ \ \dot{y}_{M0}\ \ a_T]^T \tag{3}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} \tag{4}$$

在上述系统中,a_T 表示目标常值机动加速度,u 表示加速度指令,y_M,$\dot{y}_M$,$\ddot{y}_M$ 分别表示弹-目相对运动位置、速度、加速度,制导律模型如图 1 所示。

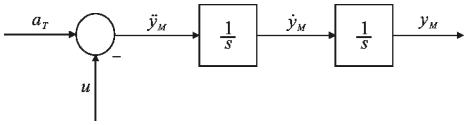


图 1 对常值机动目标的制导律示意图

Fig.1 Model for guidance law derivation for a maneuver target

扩展的时变目标罚函数写成如下形式:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}u^T(\tau)R(\tau)u(\tau)d\tau \tag{5}$$

以公式(4)为条件,终端限制可表示为:

$$DX(t_F)=E \tag{6}$$

其中

$$D=[1\ \ 0\ \ 0],E=[y_F]=[0] \tag{7}$$

R 为正定的时变权函数,定义为:

$$R=\frac{1}{(t_F-t)^n}=\frac{1}{t_{go}^n} \tag{8}$$

式中:t_F 为末导时间,$n\geqslant 0$,可为小数。

公式(5)为标准的控制量罚函数的积分的推广,其中分母上的 t_{go}^n 允许控制量的权重随着 $t_{go}\to 0$ 而增加。**n** 越大,影响越大;公式(8)通过参数 **n** 包含了一簇权函数。因此,通过建立以 **n** 为参数的罚函数,推广了导引律[6-7]。

根据最优控制理论, 上述所描述的问题最优解为[7]:

$$u^*(t)=-R^{-1}B^TFG^{-1}[F^Tx(t)-E] \tag{9}$$

其中

$$\dot{F}=-A^TF,F(t_F)=D^T;\dot{G}=F^TBR^{-1}B^TF,G(t_F)=0 \tag{10}$$

将公式(2)、公式(7)带入公式(10)中第一式,令

$$F=[f_1(t)\quad f_2(t)\quad f_3(t)] \tag{11}$$

则

$$\begin{bmatrix}\dot{f}_1(t)\\ \dot{f}_2(t)\\ \dot{f}_3(t)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\\ f_3(t)\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}f_1(t_F)\\ f_2(t_F)\\ f_3(t_F)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \tag{13}$$

解公式(12)、(13)得到

$$F=\left[1\quad t_{go}\quad \frac{1}{2}t_{go}^2\right]^T \tag{14}$$

同时,根据公式(10)中的第二式,得到

$$\dot{G}=F^TBR^{-1}B^TF=t_{go}^n\begin{bmatrix}1\\ t_{go}\\ t_{go}^2/2\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1\\ t_{go}\\ t_{go}^2/2\end{bmatrix}=t_{go}^{n+2} \tag{15}$$

因而

$$G=\int_0^{t_f}t_{go}^{n+2}dt=t_{go}^{n+3}/(n+3) \tag{16}$$

将 F、G 带入公式(9)中,得到

$$u^*(t)=-R^{-1}B^TFG^{-1}[F^TX(t)-E]=\frac{n+3}{t_{go}^2}\left(y_M+\dot{y}_Mt_{go}+\frac{1}{2}t_{go}^2a_T\right) \tag{17}$$

1.2 制导律的工程化应用

令 q 为纵向平面的弹-目视线角,V_c 为纵向平面内的弹-目相对速度,根据弹-目视线角和导弹位置的三角关系,得到:

$$\sin q=y_M/V_ct_{go} \tag{18}$$

对上式求导,得到:

$$\dot{y}_M=V_c\cdot(-\sin q+t_{go}\cdot\cos q\cdot\dot{q}) \tag{19}$$

在视线角为小角假设下[1,2],$\cos q\approx 1$,公式(19)可表示为:

$$\dot{y}_M=V_c\cdot(-\sin q+t_{go}\dot{q}) \tag{20}$$

因为控制量 u 为加速度(或过载),故公式(17)的非线性形式可表示为:

$$a_c=(n+3)\left(V_c\cdot\cos q\cdot\dot{q}+\frac{1}{2}a_T\right) \tag{21}$$

公式(17)的线性形式可表示为:

$$a_c=(n+3)\left(V_c\cdot\dot{q}+\frac{1}{2}a_T\right) \tag{22}$$

当 $n=0$ 时,公式(22)即为对常值机动目标时变最优的增强型比例导引律,即参考文献[1-2]中的增强型比例导引律是公式(22)的特例。若去掉公式(22)中的目标机动补偿项 $a_T/2$,则公式(22)退化为时变最优的比例导引。

2 权函数中指数 n 与导航比 N 的关系

根据传统的目标罚函数,导航系数只有 $N=3$ 是最优的,但工程上常常将导航系数取为[3,6],这就需要对这样一个可用的取值范围给出合理的理论解释。

在前面的推导中,假设 $n\geqslant 0$,对应的最优导航比为($n+3$),当 n 取为[0,3]时,最优导航比的取值为[3,6],这与工程经验的取值是一致的。因此,导航系数 $N\in[3,6]$均可理解为最优的,其对应的权函数 R 如图 2 所示,其中 $t_F=2$ s。

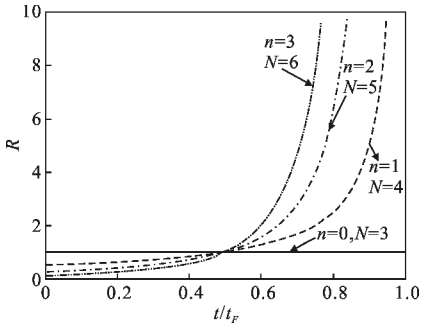


图 2 时变权函数 R 随(n,t/t_F)变化曲线

Fig.2 Curves of time-varying weighted function R with (n,t/t_F)

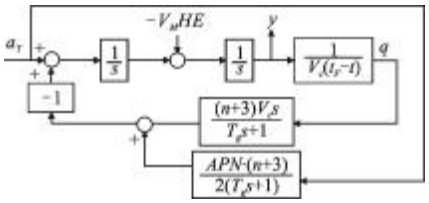
由图 2 可知,当 n 取为 0 时,R 相当于传统的权函数,其对过载的“惩罚”力度为一恒值,并不随 t_F 而变化。当 $n>0$ 时,有效导航比 N 越大,要求的 n 也越大,弹道末端对过载的“惩罚”越厉害。当然,n 不能无限大,n 越大,对导弹的过载能力要求越高,导引头信号噪声、目标闪烁噪声等对制导系统的影响也就越严重[2]。

3 考虑一阶动力学滞后的脱靶量研究

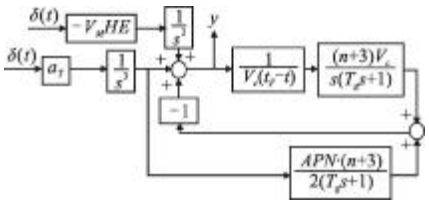
对一个具有实际意义的制导系统,制导动力学是必须要考虑的内容,这其中包括导引头动力学、制导滤波器、驾驶仪动力学等。这些动力学既可能是高阶的,也可能是低阶的,这取决于建模的准确性及系统的需求。为了使分析简化、便于理论研究,文中将这

些制导动力学统一用一个一阶动力学滞后来表示。

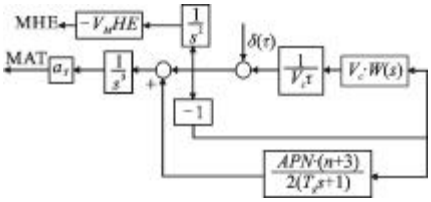
图 3(a)给出了具有一阶动力学滞后的增强型比例导引系统方块图,其中,$(n+3)$为有效导航比,T_g 为制导动力学时间常数,HE 为初始瞄准误差角,a_T 为目标常值机动加速度。图 3(a)~(d)表示了制导系统到伴随系统的转化过程,图 3(d)为最终的伴随系统[1],其中 MHE 为初始瞄准误差引起的脱靶量,MAT 为目标机动引起的脱靶量,MYT 为目标单位阶跃位置误差引起的脱靶量。APN 为制导律的标志量,当 **APN**=1 时, 制导律为时变最优三维增强型比例导引;当 APN=0 时,制导律退化为时变最优的比例导引律,这样通过标志量 APN 的设置将比例导引和增强型比例导引统一起来。



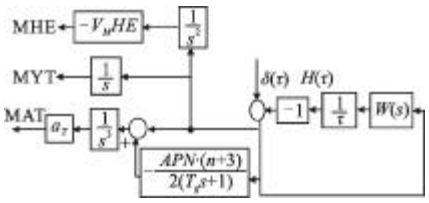
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3 增强型比例导引制导系统到伴随系统转化过程示意图

Fig.3 Convert Augmented Proportional Navigation guidance system to adjoint system

由图 3(d)知,通过卷积的积分可以得到伴随系统输入和输出的关联表达式[1]:

$$\mathbf{H}(\tau)=\frac{1}{\tau}\int \mathbf{W}(x)[\delta(\tau-x)-\mathbf{H}(\tau-x)]dx \tag{23}$$

通过 Laplace 变换中的复微分定理,将公式(23)转换到频域,得到:

$$\frac{-d\mathbf{H}(s)}{ds}=\mathbf{W}(s)[1-\mathbf{H}(s)] \tag{24}$$

同时,已知

$$\frac{d}{ds}[1-\mathbf{H}(s)]=\frac{-d\mathbf{H}(s)}{ds} \tag{25}$$

联立公式(24)、(25),得到:

$$\int \frac{d[1-\mathbf{H}(s)]}{1-\mathbf{H}(s)}=\int \mathbf{W}(s)ds \tag{26}$$

对公式(26)积分,得到:

$$1-\mathbf{H}(s)=c\cdot\exp\int \mathbf{W}(s)ds \tag{27}$$

式中:c 为常数。为了得到 c 的值,根据图 3(d),目标单位阶跃位置误差引起的脱靶量 MYT 可以表示为:

$$\mathbf{MYT}(s)=\frac{1-\mathbf{H}(s)}{s} \tag{28}$$

在时域上,在 $t=t_F$ 时,目标单位阶跃位移引起的脱靶量为 1,利用 Laplace 变换中的初值定理,得到:

$$\mathbf{MYT}(0)=1=\lim_{s\to\infty} s\left(\frac{1-\mathbf{H}(s)}{s}\right) \tag{29}$$

联立公式(27)、(29),得到:

$$\lim_{s\to\infty}\left[c\cdot\exp\int \mathbf{W}(s)ds\right]=1 \tag{30}$$

在图 3 所示的系统中

$$\mathbf{W}(s)=\frac{n+3}{s(T_g s+1)}=(n+3)\left(\frac{1}{s}-\frac{T_g}{T_g s+1}\right) \tag{31}$$

因此得到

$$\exp\int \mathbf{W}(s)ds=\left[s/\left(s-\frac{1}{T_g}\right)\right]^{n+3} \tag{32}$$

将公式(32)带入公式(30),得到 $c=1$。这样,公式(27)可表示为:

$$1-\mathbf{H}(s)=\left[s/\left(s+\frac{1}{T_g}\right)\right]^{n+3} \tag{33}$$

根据图 3(d),幅值为 a_T 的目标阶跃机动引起的脱靶量可以表示为:

$$\frac{\mathbf{MAT}}{a_T}(s)=\frac{1-\mathbf{H}(s)}{s^3}\left[1-\frac{\mathbf{APN}}{2}\frac{n+3}{T_g s+1}\right]=$$

$$\left(1-\frac{\mathbf{APN}}{2}\frac{n+3}{T_g s+1}\right)\frac{1}{s^3}\left[s/\left(s+\frac{1}{T_g}\right)\right]^{n+3} \tag{34}$$

当 n=0,即有效导航比 N 为 3 时

$$\frac{MAT}{a_T}\Big|_{n=0}=\frac{1}{(s+1/T_g)^3}\left(1-APN\frac{1.5/T_g}{s+1/T_g}\right) \tag{35}$$

表示成脱靶量的时域表达式为:

$$\frac{MAT}{a_T}\Big|_{n=0}=0.5t_F^2e^{-t_F/T_g}-APN\frac{t_F^3}{4T_g}e^{-t_F/T_g} \tag{36}$$

基于同样的算法,可以得到 n 为 1、2、3 时的脱靶量表达式,如表 1、表 2 所示。其中,表 1 为脱靶量的频域表示,表 2 为脱靶量的时域表示。

表 1 目标机动引起的脱靶量频域解析式

Tab.1 Miss distance closed-form solutions due to target maneuver in frequency domain

n	N	Miss distance expression due to target maneuver
0	3	$\frac{MAT}{a_T}\Big\|_{n=0}=\frac{1}{(s+1/T_g)^3}\left(1-APN\frac{1.5/T_g}{s+1/T_g}\right)$
1	4	$\frac{MAT}{a_T}\Big\|_{n=1}=\left(1-APN\frac{2}{T_g}\frac{1}{s+1/T_g}\right)\times\left[\frac{1}{(s+1/T_g)^3}-\frac{1}{T_g}\frac{1}{(s+1/T_g)^4}\right]$
2	5	$\frac{MAT}{a_T}\Big\|_{n=2}=\left(1-APN\frac{2.5}{T_g}\frac{1}{s+1/T_g}\right)\times\left[\frac{1}{(s+1/T_g)^3}-\frac{2}{T_g}\frac{1}{(s+1/T_g)^4}+\frac{2}{T_g^2}\frac{1}{(s+1/T_g)^5}\right]$
3	6	$\frac{MAT}{a_T}\Big\|_{n=3}=\left(1-APN\frac{3}{T_g}\frac{1}{s+1/T_g}\right)\times\left[\frac{1}{(s+1/T_g)^3}-\frac{3}{T_g}\frac{1}{(s+1/T_g)^4}+\frac{3}{T_g^2}\frac{1}{(s+1/T_g)^5}-\frac{3}{T_g^3}\frac{1}{(s+1/T_g)^5}\right]$

表 2 目标机动引起的脱靶量时域解析式

Tab.2 Miss distance closed-form solutions due to target maneuver in adjoint time domain

n	N	Miss distance expression due to target maneuver
0	3	$\frac{MAT}{a_T}\Big\|_{n=0}=0.5t_F^2e^{-t_F/T_g}-APN\frac{t_F^3}{4T_g}e^{-t_F/T_g}$
1	4	$\frac{MAT}{a_T}\Big\|_{n=1}=t_F^2e^{-t_F/T_g}\left(0.5-\frac{t_F}{6T_g}\right)-APN\frac{t_F^3}{6T_g}e^{-t_F/T_g}\left(2-\frac{t_F}{2T_g}\right)$
2	5	$\frac{MAT}{a_T}\Big\|_{n=2}=t_F^2e^{-t_F/T_g}\left(0.5-\frac{t_F}{3T_g}+\frac{t_F^2}{24T_g^2}\right)-APN\frac{t_F^3}{6T_g}e^{-t_F/T_g}\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{4}\frac{t_F}{3T_g}+\frac{t_F^2}{8T_g^2}\right)$
3	6	$\frac{MAT}{a_T}\Big\|_{n=3}=t_F^2e^{-t_F/T_g}\left(0.5-\frac{t_F}{2T_g}+\frac{t_F^2}{8T_g^2}-\frac{t_F^3}{120T_g^3}\right)-APN\frac{t_F^3}{2T_g}e^{-t_F/T_g}\left(1-\frac{3}{4}\frac{t_F}{T_g}+\frac{3}{20}\frac{t_F^2}{T_g^2}-\frac{1}{120}\frac{t_F^3}{T_g^3}\right)$

在表 2 中,若令 APN=0,则其表示的是时变最优比例导引脱靶量的解析解;若令 APN=1,则其表示的是时变最优的增强型比例导引脱靶量的解析解。

同样,根据图 3(d),初始瞄准误差引起的脱靶量的表达式为:

$$\frac{MHE}{-V_MHE}(s)=\frac{[1-H(s)]}{s^2}=\frac{1}{s^2}\left[s/\left(s+\frac{1}{T_g}\right)\right]^{n+3} \tag{37}$$

不同 n 对应的脱靶量分别表示成频域、时域的形式,如表 3、表 4 所示。

表 3 初始瞄准误差引起的脱靶量频域解析式

Tab.3 Miss distance closed-form solutions due to heading error in frequency domain

n	N	Miss distance expression due to target maneuver
0	3	$\frac{MHE}{-V_MHE}\Big\|_{n=0}=\frac{1}{(s+1/T_g)^2}-\frac{1}{T_g}\frac{1}{(s+1/T_g)^3}$
1	4	$\frac{MHE}{-V_MHE}\Big\|_{n=1}=\frac{1}{(s+1/T_g)^2}-\frac{2}{T_g}\frac{1}{(s+1/T_g)^3}+\frac{1}{T_g^2}\frac{1}{(s+1/T_g)^4}$
2	5	$\frac{MHE}{-V_MHE}\Big\|_{n=2}=\frac{1}{(s+1/T_g)^2}-\frac{3}{T_g}\frac{1}{(s+1/T_g)^3}+\frac{3}{T_g^2}\frac{1}{(s+1/T_g)^4}-\frac{1}{T_g^3}\frac{1}{(s+1/T_g)^5}$
3	6	$\frac{MHE}{-V_MHE}\Big\|_{n=3}=\frac{1}{(s+1/T_g)^2}-\frac{4}{T_g}\frac{1}{(s+1/T_g)^3}+\frac{6}{T_g^2}\frac{1}{(s+1/T_g)^4}-\frac{4}{T_g^3}\frac{1}{(s+1/T_g)^5}+\frac{1}{T_g^4}\frac{1}{(s+1/T_g)^5}$

表 4 初始瞄准误差引起的脱靶量时域解析式

Tab.4 Miss distance closed-form solutions due to heading error in adjoint time domain

n	N	Miss distance expression due to target maneuver
0	3	$\frac{MHE}{-V_M HE}\Big\|_{n=0}=t_F e^{-t_F/T_g}\left(1-\frac{t_F}{2T_g}\right)$
1	4	$\frac{MHE}{-V_M HE}\Big\|_{n=1}=t_F e^{-t_F/T_g}\left(1-\frac{t_F}{2T_g}+\frac{t_F^2}{6T_g^2}\right)$
2	5	$\frac{MHE}{-V_M HE}\Big\|_{n=2}=t_F e^{-t_F/T_g}\left(1-1.5\frac{t_F}{T_g}+\frac{t_F^2}{2T_g^2}-\frac{t_F^3}{24T_g^3}\right)$
3	6	$\frac{MHE}{-V_M HE}\Big\|_{n=3}=t_F e^{-t_F/T_g}\left(1-2\frac{t_F}{T_g}+\frac{t_F^2}{T_g^2}-\frac{t_F^3}{6T_g^3}+\frac{t_F^4}{120T_g^4}\right)$

4 仿真分析

以图 3(d)的伴随系统为基础,结合表 2、表 4,进行伴随法和解析解两方面的仿真分析。对常值机动目标,APN 分别设为 0 和 1,仿真步均长为 0.0002 s,仿真结果如图 4~6 所示。图的横轴均为 t_F/T_g,纵轴分别为 $MAT/(a_T T_g^2)$,$MHE/(-V_M HE\cdot T_g)$。

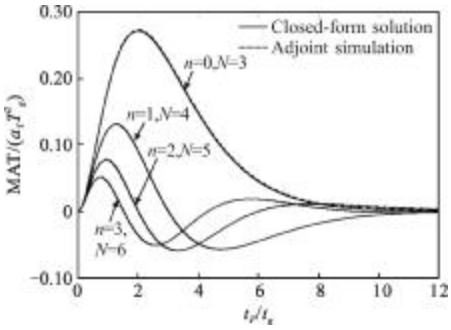


图 4 目标机动引起的标准化脱靶量(APN=0)

Fig.4 Normalized miss distance due to target maneuver (APN=0)

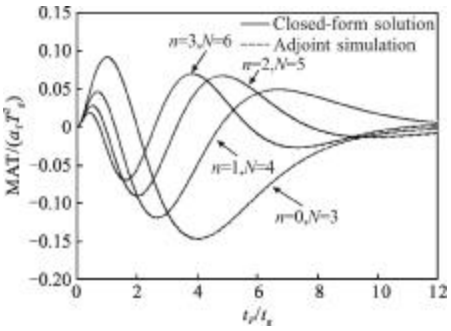


图 5 目标机动引起的标准化脱靶量(APN=1)

Fig.5 Normalized miss distance due to target maneuver (APN=1)

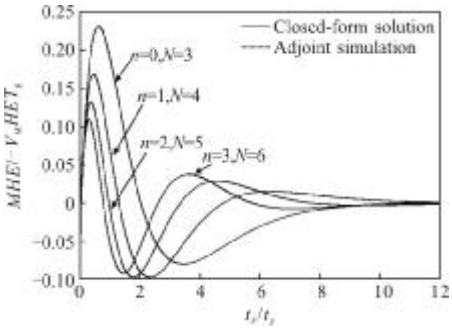


图 6 初始瞄准误差引起的标准化脱靶量

Fig.6 Normalized miss distance due to heading error

上述仿真结果表明,伴随法仿真结果与解析解完全一致,验证了上述解析解的正确性。t_F/T_g 越大,脱靶量越小,即末导时间越长或制导动力学滞后时间常数越小,脱靶量越小。而随着权函数指数 n 的增大(即有效导航比 N 增大),当末导时间较短时,脱靶量峰值减小;但当末导时间较长时,n 对脱靶量的影响并不显著。与时变最优的比例导引相比,时变最优的增强型比例导引在降低常值目标机动引起的脱靶量方面并没有显著的优势,它的优势在于对机动目标,它的初始过载指令最大而末端过载指令最小,而比例导引与它恰恰相反[2]。

5 结　论

文中以time-to-go 为基础建立时变的权函数和目标罚函数,根据最优控制理论,推导出对常值机动目标最优的比例导引及增强型比例导引律。对权函数的指数分析表明,权函数的指数与最优导航比具有一一对应的关系。

利用伴随法的数学思想，将时变最优的比例导引和增强型比例导引统一起来，推导了制导动力学系统具有一阶滞后时初始瞄准误差、目标常值机动引起的脱靶量的解析解。其中目标常值机动引起的脱靶量的解析解为时变最优的比例导引、增强型比例导引的通式。最后通过伴随法对脱靶量的数学仿真验证了解析解的正确性。

将文中的脱靶量解析研究方法推广到制导动力学为高阶时的情况也是值得尝试的，但随着动力学阶数的提高可能会造成求解困难。

参考文献：

[1] Paul Zarchan. Tactical and Strategic Missile Guidance, 5th edition[M]. Lexington: AIAA Inc, 2005: 31-50.

[2] Garnell P. Guided Weapon Control Systems[M]. Revised by Qi Zaikang, Xia Qunli. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2003: 297-364.

[3] Xu Ping, Wang Wei, Lin Defu, et al. Fluence of zero position error of angular rate on the precision of proportional navigation[J]. Infrared and Laser Engineering, 2011, 40(11): 2255-2260. (in Chinese)
徐平, 王伟, 林德福, 等. 角速度零位误差对比例导引制导精度的影响[J]. 红外与激光工程, 2011, 40(11): 2255-2260.

[4] Wang Wei, Wu Kou, Xu Ping, et al. Laser semiactive seeker angular rate noise characteristics and its influence analysis[J]. Infrared and Laser Engineering, 2012, 41(9): 2370-2374. (in Chinese)
王伟, 吴口, 徐平, 等. 激光半主动导引头角速度噪声特性及其影响分析[J]. 红外与激光工程, 2012, 41(9): 2370-2374.

[5] Zhong Dudu, Tao Xiaochuan, Zhang Kai, et al. Overview of guidance information extraction for infrared imaging seeker [J]. Infrared and Laser Engineering, 2010, 39 (4): 581-588. (in Chinese)
钟都都, 陶小川, 张凯, 等. 红外成像制导信息提取技术[J]. 红外与激光工程, 2010, 39(4): 581-588.

[6] Ohlmeyer Ernest J. Generalized vector explicit guidance[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(2): 261-268.

[7] Ryoo ChangKyung, Cho Hangju, Tahk Minjea. Time-to-go weighted optimal guidance with impact angle constraints[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(3): 483-492.

[8] Qian Xingfang, Lin Ruixiong, Zhao Yanan. Missile Aviation Mechanics [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2006: 149-154. (In Chinese)
钱杏芳, 林瑞雄, 赵亚男. 导弹飞行力学 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2006: 149-154.

[9] Zhang Hong, Lin Defu, Qi Zaikang. Influence of radar guidance system noise on precision of guidance and control [J]. Journal of System Simulation, 2008, 20 (5): 1295-1298. (In Chinese)
张宏, 林德福, 祁载康. 雷达制导系统噪声对制导精度的影响[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(5): 1295-1298.