

## 采用 Zernike 多项式对大气湍流相位屏的仿真和验证

王奇涛, 佟首峰, 徐友会

(长春理工大学 空间光电技术研究所, 吉林 长春 130022)

**摘要:** 采用 Zernike 多项式法模拟大气湍流相位屏, 并使用大气相干长度和相位结构函数来验证所产生大气湍流相位屏的正确与否。仿真结果表明, Zernike 多项式法产生的大气湍流相位屏在低空间频率部分与理论值研究较为相符, 但在高空间频率部分的仿真结果与理论值差别较大, 这是由于 Zernike 多项式算法本身存在一定的应用条件。此外, 虽然可以通过增加 Zernike 多项式的阶数或者改变接收口径改变大气湍流相位屏上湍流的分布, 但是却存在计算量大, 计算复杂等缺点。因此, 在激光通信系统的具体应用时, 应该综合考虑, 选择最佳的实验方案。

**关键词:** 湍流相位屏; Zernike 多项式; 大气相干长度; 相位结构函数

**中图分类号:** TN913    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1007-2276(2013)07-1907-05

## On simulation and verification of the atmospheric turbulent phase screen with Zernike polynomials

Wang Qitao, Tong Shoufeng, Xu Youhui

(The Institute of Space Opto-Electronic Technology, Changchun University of Science and Technology,  
Changchun 130022, China)

**Abstract:** In this article Zernike polynomials was used to produce atmospheric turbulence phase screen. Besides, the atmospheric coherence length and the phase structure function were used to verify whether the atmospheric turbulence phase screen is right or not. Simulation results show that, in the low spatial frequency components, the atmospheric turbulence phase screen generated with Zernike polynomial method was consistent with the theoretical values, but in the high spatial frequency components, the simulation results had big difference with the theoretical values. This is because Zernike polynomials method has inherent limitations. In addition, the simulation results also show that, the distribution of turbulence in the atmospheric turbulence phase screen can be changed by increasing the Zernike polynomials of orders or changing the receiving apertures, but which involves great and complex calculation. Therefore, in the specific application of the laser communication system, the best experimental program should be considered.

**Key words:** atmospheric turbulence phase screen; Zernike polynomials; atmospheric coherence length; phase structure function

收稿日期: 2012-11-06; 修订日期: 2012-12-10

作者简介: 王奇涛(1987-), 男, 硕士生, 主要从事光电子技术及应用方面的研究。Email: 463912524@qq.com

导师简介: 佟首峰(1972-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事激光通信、光电跟踪、光电检测、光电成像等领域方面的研究。

Email: tsf@cust.edu.cn

## 0 引言

在激光通信系统中,由于大气局部温度、压强的随机变化而导致折射率的变化,进而引起大气湍流强度发生变化,因此为了掌握和了解湍流的变化,以便采取相关措施减少因大气湍流变化带来的光束质量下降等问题,提高通信接收系统光束的通光量,有必要对大气湍流进行相关的研究。湍流相位屏是对大气湍流进行研究一种直观有效的数值模拟方法。虽然湍流相位屏的研究有多种不同的方法,例如单层法、多层法、统计法等,但是总体可归纳为以下两类:一类为 McGlamery<sup>[1]</sup>提出的功率谱反演法,即通过大气湍流的功率谱密度函数得到扰动的大气湍流相位分布。后来许多学者针对这种方法做了大量研究和应用,例如 Fleck, 严海星<sup>[2]</sup>等人都用此方法仿真大气湍流。该方法可以应用于多种大气湍流模型,例如 Kolmogrov 谱, Vonkarman 谱, 内尺度谱等模型。另一种方法就是采用正交的 Zernike 多项式法来模拟大气湍流,该方法对 Kolmogrov 谱的模拟效果比较好,对其他形式的湍流功率谱研究较少。Roggemann<sup>[3]</sup>等人采用这种方法来产生湍流相位屏。笔者在前人研究和工作的基础上提出自己的结论和观点。

文中主要采用正交的 Zernike 多项式来产生大气湍流相位屏,给出利用湍流相位屏的结构函数来验证湍流相位屏的统计特性,并且利用相位结构函数来计算大气相干长度,通过理论值与实际值的比较来判断采用这种方法模拟的误差大小。为了将 Zernike 多项式的仿真结果和功率谱反演法仿真结果进行比较,以便让人们更好地了解两种仿真结果之间的差别,文中只给出功率谱反演法仿真大气湍流相位屏结果和必要的结果说明,理论部分未做深入探讨。

## 1 Zernike 多项式

Zernike 多项式是定义在单位圆上的极坐标表达式<sup>[4]</sup>:

$$Z_n^m(r, \theta) = R_n^m(r) \Theta_n^m(\theta) \quad (1)$$

其中,径向函数为:

$$R_n^m(r) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n-m)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k} \quad (2)$$

角向函数为:

$$\Theta_n^m(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(m\theta) & m \geq 0 \\ \sqrt{2} \sin(m\theta) & m < 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中: $n$ 和 $m$ 分别为径向自由度和角向频率,其中 $n$ 的取值为 $0, 1, 2, \dots$ , $m$ 的变化范围为 $-n, -n+2, \dots, n-2, n$ ,其中 $r$ 在 $0-1$ 之间取值, $\theta$ 在 $0-2\pi$ 之间取值。

## 2 Zernike 多项式创建大气湍流相位屏

波前相位函数  $W(r, \theta)$  可以采用正交的 Zernike 多项式表示为<sup>[5]</sup>:

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_m c_{n,m} Z_n^m(r/r_{max}, \theta) \quad (4)$$

式中: $c_{n,m}$ 为加权系数; $Z_n^m$ 为第 $n$ 项 Zernike 多项式。由于波前相位中 Zernike 多项式的系数  $z_i$  可以近似认为具有零均值的 Gauss 随机分布。设  $A = [z_0, z_1, z_3, \dots, z_i]$  表示波前相位的系数向量。因此可以得到系数向量  $A$  的协方差矩阵  $C$ 。

$$C = E[A \cdot A'] \quad (5)$$

对于 Kolmogorov 湍流理论来说,根据 Noll 矩阵可以推导出 Zernike 中两项多项式  $Z_i$  和  $Z_j$  的协方差表达式为:

$$E(z_i, z_j) = \frac{K_{zz}' \delta_z \Gamma[(n+n'-5/3)/2] (D/r_0)^{5/3}}{\Gamma[(n-n'+17/3)/2] \Gamma[(n+n'+23/3)/2]} \quad (6)$$

式中: $n, n', m, m'$ 分别为径向和角向级次; $K_{zz}' = 2.2698 (-1)^{(n+n'-2m)/2} \sqrt{(n+1)(n'+1)}$ ;  $D$ 为光学系统的口径; $r_0$ 为大气相干常数; $\delta_z = (m=m') \cap (\text{parity}(j, j') \cup (m=0))$ 。根据上面公式即可确定 Zernike 多项式前面的系数,通过上面的公式就可以模拟公式 (4) 在不同条件下得到符合 Kolmogorov 湍流理论的大气湍流。

## 3 湍流相位屏的仿真

### 3.1 Zernike 多项式仿真大气湍流相位屏

大气湍流是一种随机形状和大小的涡旋。在光学领域中指大气中局部温度、压强的随机变化而引起的折射率随机变化,由于温度、压强等不确定因素的变化和影响,导致湍流的变化情况很难被及时掌握。因此为了掌握和了解湍流的变化情况,以便及时了解光束通过大气时的光学波前,采用 Zernike 多项式来模拟部分波前,图 1 中的(a)、(b)、(c)和(d)分别

给出了 5 阶、50 阶、150 和 200 阶的波前。

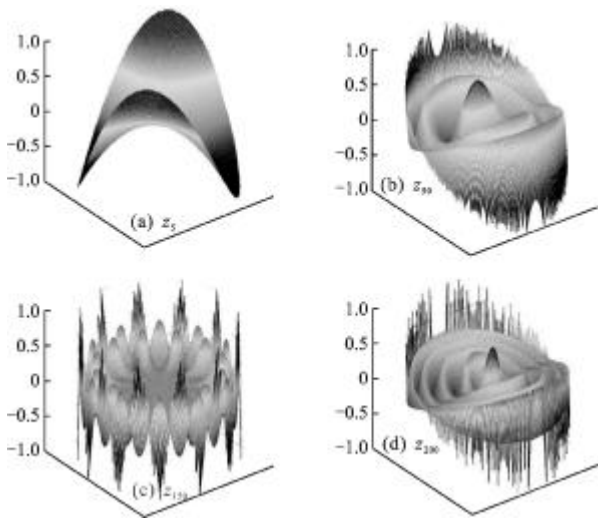


图 1 不同阶数 Zernike 多项式波面的仿真结果

Fig.1 Wavefront simulation results with different orders Zernike polynomials

图 2 是采用 Zernike 多项式方法模拟 15 阶、150 阶和 250 阶的大气湍流相位屏,图(a)~(c)是在接收口径为  $D=0.2\text{m}$  时湍流的仿真,图(d)~(f)是在接收口径  $D=0.5\text{m}$  时湍流的仿真。

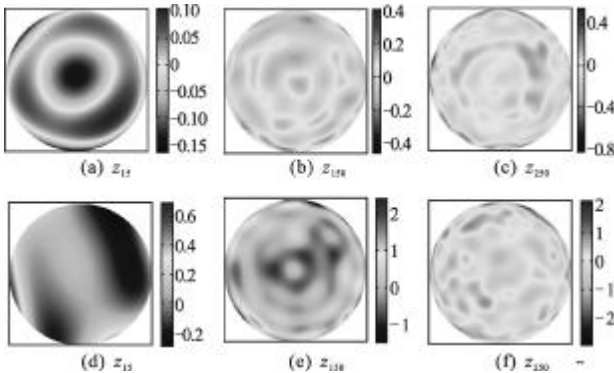


图 2 Zernike 多项式模拟不同接收口径的大气湍流相位屏

Fig.2 Atmospheric turbulence phase screen by Zernike polynomials to simulate different receiving aperture

从图 2 中可以看出,当采用 Zernike 多项式模拟不同接收口径、不同阶数情况下的大气湍流相位屏中的湍流分布时,在阶数相同的情况下,口径越大,中心部分的湍流分布较强,边缘附近的湍流分布较弱。且 Zernike 多项式的仿真阶数越低,湍流屏上的低频成分突出,相位非常平稳,缺乏高频成分。随着 Zernike 多项式阶数的不断增加,湍流相位屏上的湍

流分布虽然平缓,但是相位已经不再平稳。说明随着 Zernike 阶数的不断增加,湍流由低频开始向高频延伸,但是延伸成分不是很高。因此可以通过增加 Zernike 多项式的阶数来改善大气湍流的分布。但是不能只通过增加 Zernike 多项式的阶数来改善整个空间的大气湍流成分,并且随着 Zernike 多项式阶数的不断增加,运算量越大,湍流的改善效果却不明显。总之,从图 2 中看出,改变湍流分布有两种方法:一是通过增加 Zernike 多项式的阶数,另外一种方法是改变光束的接收口径。

图 3 为接收口径分别为  $0.2\text{m}$  和  $0.5\text{m}$ , 仿真阶数分别为 15 阶、150 阶和 250 阶情况下对应的相位变化。从图 3 中可以看出当接收口径  $D=0.5\text{m}$  时,随着 Zernike 多项式阶数的不断增加,仿真出来的相位屏的相位出现凹凸形状,这些凹凸状表示相位起伏的程度,然而相位图中的最高点和最低点相差不大。当接收口径  $D=0.5\text{m}$  时,相位屏上的相位的凹凸行状,相对于接收口径  $D=0.5\text{m}$  时的湍流变化更加明显,起伏程度也更加明显,即相位图中最高点和最低点之间的相差非常大。图 3 是对图 2 相位屏中相位变化的进一步放大和解释。然而在实际大气湍流相位屏中一般只校正前 16 项,即低频成分,而对高频成分的校正需要通过其他方法实现。

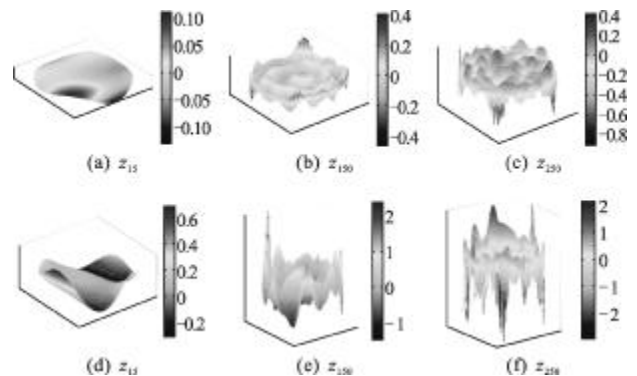


图 3 不同接收口径  $D$ 、不同 Zernike 阶数情况下,湍流相位屏中相位的变化

Fig.3 Phase with the range of atmospheric turbulence phase screen with different receiving aperture and different Zernike orders

### 3.2 功率谱反演法仿真大气湍流相位屏

此外文中还给出了波长为  $632.8\text{nm}$ , 相位屏大小分别为  $512 \times 512$  和  $256 \times 256$ , 即接收口径的接收尺寸约为  $0.5\text{m}$  和  $0.2\text{m}$ , 采样点间隔约为  $0.001\text{m}$ ,

传输距离 $Z=1000\text{m}$ 的条件下采用功率谱反演法生成的 Kolmogorov 谱相位屏。

图 4 是在折射率结构常数  $C_n^2=2\times 10^{-17}$ ,大气相干常数  $r_0=1.2\text{m}$  时采用功率谱反演法生成的 Kolmogorov 相位屏。从图 4 中可以看到,功率谱反演法<sup>[6]</sup>生成的大气湍流相位屏的仿真结果正好与 Zernike 多项式法仿真结果相反,即低频空间与理论值不符,而在高空间频率时与理论值比较符合。造成低空间频率不吻合现象的原因是傅里叶变换算法本身的局限性。

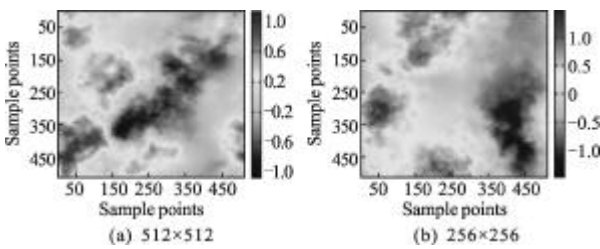


图 4 不同分辨率下 Kolmogorov 相位屏  
Fig.4 Kolmogorov phase screen with different resolutions

### 4 大气湍流相位屏的模拟验证

大气湍流相位统计特性可以采用相位结构函数  $C_n^2$  和大气相干长度  $r_0$  来描述,因此通过 Zernike 多项式所产生的大气湍流相位屏的正确与否也是通过验证其相应的相位结构函数  $C_n^2$  和大气相干长度  $r_0$  来验证<sup>[7]</sup>。

对于 Kolmogorov 谱而言,Fried 给出了相位结构函数表达式:

$$D_\phi(\vec{r})=6.88(\rho/r_0)^{5/3} \tag{7}$$

式中: $\rho$  为空间相干长度; $r_0$  为大气相干长度。相位结构函数的定义为:

$$D_\phi(\vec{r})=\langle [\phi(\vec{\rho}+\vec{r})-\phi(\vec{\rho})]^2 \rangle \tag{8}$$

为了验证湍流相位屏的正确与否,选取波长为  $632\text{nm}$ 、相位屏大小为  $256\times 256$ ,接收口径  $D$  为  $0.5\text{m}$ ,相干长度  $r_0$  为  $0.3\text{m}$ ,采用 Zernike 多项式模拟不同阶数的相位结构函数的验证结果。图 5 中的 a、b、c、d、e 分别为给出了理论、5 阶、20 阶、100 和 200 阶数下采用 Zernike 多项式生成的 Kolmogorov 相位结构函数的仿真结果。

从图 5 中可以得出以下结论:与理论比较,Zernike 相位屏在低空间频率部分比较吻合,而在高空间频率成分明显不足;高空间频率不足的部分可

以通过增加 Zernike 多项式的阶数来改善,随着 Zernike 阶数的增加,可以增加高空间频率部分,但是不能消除高频部分不足的情况。此外 Zernike 多项式模拟湍流相位屏,只能针对 Kolmogorov,不能针对 Vonkaman 谱、内尺度谱等,有一定的应用局限。此外还可以模拟不同相干长度( $r_0=0.1\text{m}$  和  $r_0=0.01\text{m}$ )的 Kolmogorov 湍流,所得图像与上面的仿真结果类似,因此可以采用相位结构函数和大气相干长度来验证湍流相位屏的正确与否。

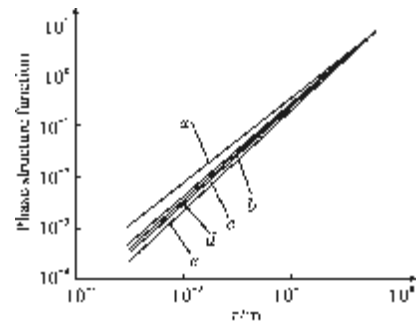


图 5  $r_0=0.3\text{m}$  时 Zernike 多项式法生成的 Kolmogorov 相位屏结构函数

Fig.5 Structure function of Kolmogorov phase screen generated by Zernike polynomial method when  $r_0=0.3\text{m}$

### 5 结论

文中采用 Zernike 多项式来模拟和验证 Kolmogorov 湍流相位屏,并且采用相位结构函数来验证湍流相位屏的正确与否。结果表明,与理论相比,Zernike 法产生的湍流相位屏对于低空间频率的模拟比较符合理论值,而对高空间频率的模拟则表现出明显的不足。此外,虽然可以通过增加 Zernike 多项式的阶数来改善高频成分不足,但是改善幅度不大,并且需要大量的相关计算。因此要改善整个空间大气湍流的空间频率分布,则需要将两种方法综合应用,这样就可以消除每种方法带来的缺陷。相位结构函数能够正确验证湍流相位屏,从验证曲线可以看出,低空间频率时与理论比较符合,高空间频率时与理论有明显的差别。

研究湍流相位屏的主要目的在于大气湍流对激光通信链路的影响,以便及时了解和掌握湍流相位的分布情况,进而选取合适的通信方案,进行激光通信方案和地点的选择。文中的不足之处在于,文中只是在理想条件下,通过改变相关的参数改变湍流相

位屏上湍流的分布,因而无法知道实际光斑通过大气时产生的湍流变化。因此在接下来的工作之中,课题组将会采用美国 BNS 公司生产的液晶空间光调制器,重点验证验证光斑通过大气时产生的大气湍流相位屏,并将液晶空间光调制器作为补偿和校正器件来弥补光通信系统中的光能损失,以此来提高接收系统光斑的质量和能量。

#### 参考文献:

- [1] Mcglamery B L. Restoration of turbulence-degraded images [J]. J Opt Soc Am, 1996, 7: 293-297.
- [2] Yan H X. Numerical simulation of an adaptive optics system with laser propagation in the atmosphere [J]. Appl Opt, 2000, 39: 3023-3031.
- [3] Roggemann M C, Welsh B M. Image through turbulence [M]. New York: CRC Press, 1995.
- [4] Liu Liangqing. Matlab Assisted Laser Analysis and Application [M]. Wuhan: Wuhan Lingyun Optoelectronics Technology Cooperation, 2008: 13-15. (in Chinese)  
刘良清. Matlab 辅助激光分析与应用[M]. 武汉: 武汉凌云光电科技有限公司, 2008:13-15.
- [5] Duan Jin, Wang Zexi, Jing Wenbo, et al. Numerical simulation of atmospheric turbulence phase screen based on Zernike polynomials [J]. Journal of ChangChun University of Science and Technology, 2010, 33(3): 63-64, 62. (in Chinese)  
段锦, 王曦泽, 景文博, 等. 基于 Zernike 多项式的大气湍流相位屏的数值模拟 [J]. 长春理工大学学报, 2010, 33(3): 63-64, 62.
- [6] Zhang Huimin, Li Xinyang. Numerical simulation study of the atmospheric turbulence distortion phase screen[J]. Optical Engineering, 2006, 33(3): 41-43. (in Chinese)  
张慧敏, 李新阳. 大气湍流畸变相位屏的数值模拟方法研究[J]. 光电工程, 2006, 33(3): 41-43.
- [7] Wang Lijin, LiQiang, Wei Honggang, et al. Numerical simulation and validation of the atmospheric turbulence phase screen [J]. Optical Engineering, 2007, 34 (3): 62-67. (in Chinese)  
王立谨, 李强, 魏红刚, 等. 大气湍流随机相位屏的数值模拟和验证[J]. 光电工程, 2007, 34(3): 62-67.
- [8] Gordon D Love. Wavefront correction and production of Zernike modes with a liquid crystal spatial light modulator [J]. Applied Optics, 1997, 36: 1517-1524.