

振动条件下激光陀螺捷联惯导系统的圆锥算法研究

钟明飞, 汤建勋, 江奇渊, 韩松来, 饶谷音, 袁保伦

(国防科学技术大学 光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 分析了振动条件下导弹捷联惯导系统(SINS)圆锥运动形成的原因,研究了经典圆锥运动补偿算法及其估计算法漂移的局限性。针对经典算法存在的局限性以及导弹等武器系统所处振动环境的特点,对标准圆锥补偿算法进行了优化。提出了振动条件下,在保证不影响导航计算机正常工作的前提下,圆锥运动补偿时有效利用前一周期姿态值的优化算法是有必要的。仿真和试验结果表明,在振动条件下,在进行圆锥运动补偿时应当采用标准优化圆锥运动补偿算法。

关键词: 圆锥运动; 振动条件; 激光陀螺; 捷联惯导

中图分类号: U666.12 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2014)08-2626-05

Coning algorithm of laser gyro strapdown inertial navigation system in vibrating condition

Zhong Mingfei, Tang Jianxun, Jiang Qiyuan, Han Songlai, Rao Guyin, Yuan Baolun

(College of Opto-electronics Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The cause that how the coning motion of missile strapdown inertial navigation system(SINS) in vibrating condition occurs was analyzed, and the classical coning compensation algorithm was studied. The limitation of classical compensation algorithm drifting error was also estimated. In the view the limitations of classical compensation algorithm and the characteristics of the vibrating environment of missiles and other weapons, the standard compensation algorithm were optimized. It was proposed that in vibrating condition, under the condition of not effecting the navigation computer's normal work, it is necessary to consider the pre-sample in the coning motion compensation. Simulation and experiment results show that the coning motion compensation should take the standard compensation algorithm in vibrating condition.

Key words: coning motion; vibrating condition; ring laser gyro; strapdown inertial navigation

收稿日期: 2013-12-14; 修订日期: 2014-01-15

基金项目: 国家自然科学基金(61203199)

作者简介: 钟明飞(1987-), 男, 硕士生, 主要从事惯性技术方面的研究。Email: zhongmingfei11@163.com

导师简介: 汤建勋(1972-), 男, 研究员, 硕士生导师, 博士, 主要从事激光陀螺及惯性技术方面的研究。Email: Tangjianxun@sina.com

0 引言

在捷联惯导系统中, 惯性仪表直接安装在导弹上, 导弹发动机的振动影响、空气动力扰动都会引起弹体的角振动和线振动, 而这些运动都会直接影响惯性仪表的精度^[1]。当弹体沿诸正交的弹体轴存在同频率角振动和线振动时, 数学平台隔离的不完善会诱发整流分量, 角振动引起的整流效应将在姿态更新的计算中产生圆锥运动。经典圆锥运动补偿基本思路是比较标准圆锥运动条件下的理论更新等效旋转矢量与由陀螺角增量采样构造的计算更新等效旋转矢量, 求得等效旋转矢量误差, 再以该误差的非周期项最小为准则, 确定角增量构造算法的各项系数, 如 Jordan 的二子样法, Miller 的三子样算法和 Lee 的四子样算法^[2-7]。而近些年来国内对圆锥运动的研究也有了较大的进展, 如黄磊提出圆锥算法由常值漂移误差和截断误差组成^[8]; 张朝飞推导了利用前 M 个周期输出的 N 子样通用补偿算法^[9]; 陈建锋对传统圆锥算法的周期项进行了二次优化^[10]。

在经典圆锥误差补偿系数推导过程中, 必须假设圆锥运动的半锥角为小量, 但实际上并不能认为它是无穷小量, 因此, 特别是在半锥角较大且子样数较高时, 剩余误差估计公式偏差严重, 这种精度高估了的算法在导弹等振动条件下的应用受到限制。文中利用近似推导和仿真的方法阐明经典圆锥运动补偿算法的局限性, 找到了适合导弹等振动条件下的圆锥运动补偿技术。

1 经典圆锥运动

经典圆锥运动可以用旋转矢量表示为:

$$\Phi(t)=[0 \quad \alpha \cos \Omega t \quad \alpha \sin \Omega t]^T \quad (1)$$

式中: α 为圆锥运动的半锥角; Ω 为圆锥运动的频率, 其对应的姿态四元数以及角速度矢量表示分别为:

$$Q(t)=\begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ 0 \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cos \Omega t \\ \sin \frac{\alpha}{2} \sin \Omega t \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\omega(t)=\begin{bmatrix} -2 \Omega \sin ^2 \frac{\alpha}{2} \\ -\Omega \sin \alpha \sin \Omega t \\ \Omega \sin \alpha \sin \Omega t \end{bmatrix} \quad (3)$$

上述三式是同一运动的三种不同数学表达方式, 它们之间存在一定的关系。设圆锥运动在一个姿态更新周期 h 内的更新四元数为 $q(h)$, 则时刻 t 到时刻 $t+h$ 之间的姿态四元数如下:

$$Q(t+h)=Q(t)*q(h) \quad (4)$$

可得到更新四元数如公式(5)所示, 其中 $\lambda_N=\Omega h$ 。

$$q(h)=Q^{-1}(t)*Q(t+h)=\begin{bmatrix} 1-2\left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\lambda_N}{2}\right)^2 \\ -\sin \frac{\alpha}{2} \sin \lambda_N \\ -\sin \alpha \sin \Omega\left(t+\frac{h}{2}\right) \sin \frac{\lambda_N}{2} \\ \sin \alpha \sin \Omega\left(t+\frac{h}{2}\right) \sin \frac{\lambda_N}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

根据四元数的定义, 等效转动矢量 $\Phi(t, t+h)$ 与更新四元数 $q(h)$ 之间有以下关系:

$$\Phi=|\Phi(t, t+h)| \quad (6a)$$

$$q(h)=\cos \frac{\Phi}{2}+\Phi(t, t+h) \frac{\sin \left(\frac{\Phi}{2}\right)}{\Phi} \quad (6b)$$

记 $\xi=\Phi/\sin \left(\frac{\Phi}{2}\right)$, 得到更新等效旋转矢量的理论值:

$$\Phi(t, t+h)=\xi \times \begin{bmatrix} -\sin ^2 \frac{\alpha}{2} \sin \lambda_N \\ -\sin \alpha \sin \Omega\left(t+\frac{h}{2}\right) \sin \frac{\lambda_N}{2} \\ \sin \alpha \cos \Omega\left(t+\frac{h}{2}\right) \sin \frac{\lambda_N}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

假设在一个姿态更新周期 h 内, 进行了 N 次等间隔角增量采样, 则

$$\Delta \theta=f_t^{t+h} \omega(t) dt=\sum_{i=1}^N \Delta \theta(i)=\begin{bmatrix} -\sin ^2 \frac{\alpha}{2} \lambda_N \\ -\sin \alpha \sin \Omega\left(t+\frac{h}{2}\right) \sin \frac{\lambda_N}{2} \\ \sin \alpha \cos \Omega\left(t+\frac{h}{2}\right) \sin \frac{\lambda_N}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

上述分析中, 公式(7)表示理想圆锥运动在一个姿态更新周期 h 内的等效旋转矢量理论值, 而公式(8)表示在此期间激光陀螺的输出总角增量, 显然二者之间很难建立等价关系。

2 经典圆锥运动补偿算法及其剩余误差估计的局限性

假设半锥角 α 为正值小量, 则更新等效旋转矢量的理论值式近似为^[9]:

$$\Phi_m \approx \begin{bmatrix} -\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \lambda_N \\ -\sin \alpha \sin \Omega \left(t + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{\lambda_N}{2} \\ \sin \alpha \cos \Omega \left(t + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{\lambda_N}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

比较公式(8)和公式(9)可见, 它们只在 x 轴分量上不同, 如果直接以陀螺总角增量 $\Delta\theta$ 代替等效旋转矢量 Φ_m 进行导航解算, 在每个姿态更新周期 h 内都将产生算法漂移(即圆锥效应误差):

$$\delta\Phi_m = \Phi_m - \Delta\theta_{mx} = -2\sin^2 \frac{\alpha}{2} (\lambda_N - \sin \lambda_N) \quad (10)$$

经典圆锥运动补偿公式为:

$$\delta\hat{\Phi}_{mx} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} k_{N-k} \Delta\theta(i) \right] \times \Delta\theta_m(N) \quad (11)$$

则, N 子样提供的有效补偿值为:

$$\varepsilon_N = \delta\Phi_m - \delta\hat{\Phi}_{mx} = \frac{N \times N!}{2^{(N+1)} \prod_{k=1}^{N+1} (2k-1)} \alpha^2 \lambda_N^{2N+1} \quad (12)$$

经典圆锥运动补偿算法系数与漂移如表 1 所示。

表 1 圆锥运动补偿算法系数与漂移

Tab.1 Coning motion compensation algorithm coefficient and error estimations

N	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	ε_N
1					$1/12 \times \alpha^2 \lambda_N^3$
2	2/3				$1/960 \times \alpha^2 \lambda_N^5$
3	27/20	9/20			$1/24\ 120 \times \alpha^2 \lambda_N^7$
4	214/105	92/105	54/105		$1/82\ 575\ 360 \times \alpha^2 \lambda_N^9$
5	1375/504	650/504	525/504	250/504	$1/54\ 140\ 625\ 000 \times \alpha^2 \lambda_N^{11}$

由参考文献[3]可知, 经典圆锥运动补偿中剩余误差估计存在局限性, 圆锥补偿算法存在无法超越的极限精度, 如公式(13)所示。

$$\varepsilon = \delta\Phi_m - \delta\hat{\Phi}_{mx} = \sin^2 \frac{\alpha}{2} (2\lambda_N - \xi \sin \lambda_N) - \sin(\alpha) \cdot$$

$$\sum_{i=1}^Y \sum_{j=1}^N A_{ij} K_j \lambda_N^{2N+1} = \left(\frac{1}{4} \cos 2\alpha - \cos \alpha + \frac{3}{4} \right) \cdot$$

$$(\lambda_N - \sin \lambda_N) - \frac{1}{2} (\xi - 2) (1 - \cos \alpha) \sin \lambda_N \quad (13)$$

针对以上分析进行仿真, 分别取圆锥补偿周期为 0.01 s、0.001 s, 半锥角为 $\alpha=0.1^\circ、1^\circ、10^\circ$, 锥运动频率 f 从 1~50 Hz, 则各种剩余误差估计仿真结果如图 1 所示。

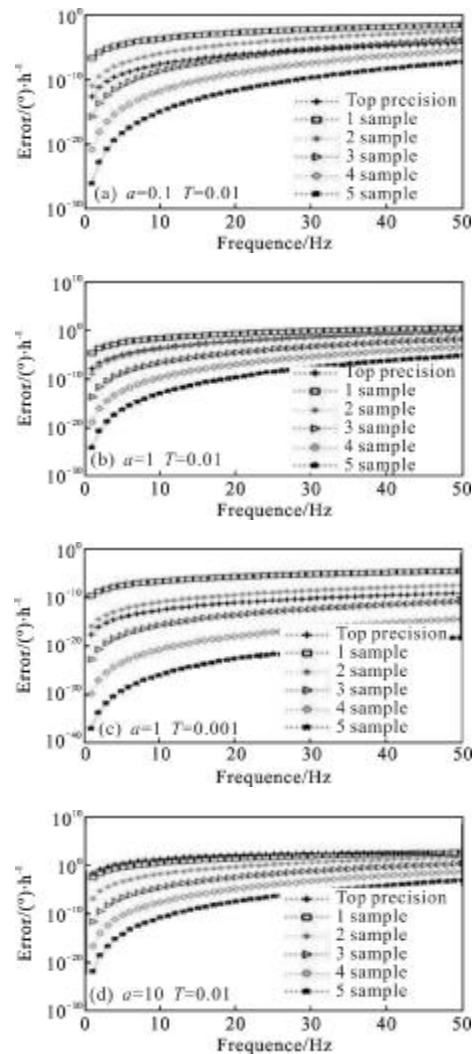


图 1 不同子样经典圆锥运动补偿算法剩余误差估计曲线

Fig.1 Curves of the residual error of different sub-samples classical coning motion compensation algorithms

仿真结果表明当子样数比较大并且圆锥频率较低时, 经典剩余误差估计曲线 ε_N 高于极限精度 $\bar{\varepsilon}$ 好几个数量级, 此时的经典剩余误差 ε_N 估计过于理想化了, 是不准确的。它只能在半锥角无穷小时成立, 因而在实际工程中应用价值受到限制。很明显, 在一

定半锥角和圆锥频率条件下,由于极限精度的存在,当极限精度产生限制作用时,提高圆锥运动补偿精度的唯一途径是缩短圆锥补偿周期,而不能简单地通过增加子样数来实现。从图中可以看出,当圆锥补偿周期从 0.01 s 变为 0.001 s 时,极限精度的限制作用明显减小,精度明显提高。

3 标准圆锥补偿算法及其优化

从上一节的分析可以知,圆锥补偿与陀螺信号的采样时间间隔 Δt 无关,而仅与姿态更新周期 h 有关,然而在实际的工程应用中,姿态更新周期 h 不可能做到无穷小,从参考文献[5]中可以得到圆锥补偿量的通式,在第 m 个圆锥补偿周期 h 内,圆锥补偿的估计值如公式(14)所示。

$$\delta\hat{\Phi}_m = [\sum_{j=N-P+1}^N K_{2N-j}\Delta\theta_{m-1}(j) + \sum_{i=1}^{N-1} K_{N-i}\Delta\theta_m(i)] \times \Delta\theta_m(N) \quad (14)$$

其中, $\Delta\theta_m(i)$ 为第 m 个圆锥补偿周期内的第 i 个角增量输出; $\Delta\theta_{m-1}(j)$ 为第 $m-1$ 个圆锥补偿周期内的第 j 个角增量输出; P 为前一圆锥补偿周期的角增量个数; N 为本圆锥补偿周期内的角增量个数; k_j 为待求的圆锥算法系数。

在上述理论的基础上,提出利用已解算出的姿态更新数据修正圆锥误差项算法,即利用当前解算周期的前两个周期获得的角增量信息进行修正。其中, $\theta' = \int_{t-h}^t \omega dt$, $\theta'' = \int_{t-2h}^{t-h} \omega dt$, 则 x 轴上的非可交换性误差为:

$$\delta\hat{\Phi}_{new} = \theta + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N k_{ij}(\theta_i \times \theta_j) + g_1(\theta' \times \theta) + g_2(\theta'' \times \theta) \quad (15)$$

$$\delta\hat{\Phi}_{newx} = \frac{1}{2} a^2 [-\lambda_N + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N 8K_{ij} \sin^2\left(\frac{\lambda_N}{2N}\right) \times \sin\left(\frac{j-i}{N} \lambda_N\right) + 8g_1 \sin^2\left(\frac{\lambda_N}{2}\right) \times \sin(\lambda_N) + 8g_2 \sin^2\left(\frac{\lambda_N}{2}\right) \sin(2\lambda_N)] \quad (16)$$

则可以利用 $\tilde{\varepsilon} = \delta\Phi_m - \hat{\Phi}_{newx}$, 当使得 $\tilde{\varepsilon}$ 最小时,通过待定系数法得到优化后的 K_{ij} , g_1 以及 g_2 。假设 $N=3$, 将 $N=3$ 带入公式(16), 结合 $\tilde{\varepsilon} = \delta\Phi_m - \hat{\Phi}_{newx}$ 可以得到:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} = & \frac{1}{2} a^2 [\lambda_N - \sin\lambda_N + 8(K_{12} + K_{23}) \sin^2\left(\frac{\lambda_N}{6}\right) \sin\left(\frac{\lambda_N}{3}\right) - \\ & 8K_{13} \sin^2\left(\frac{\lambda_N}{6}\right) \sin\left(\frac{2\lambda_N}{3}\right) - 8g_1 \sin^2\left(\frac{\lambda_N}{2}\right) \sin(\lambda_N) - \\ & 8g_2 \sin^2\left(\frac{\lambda_N}{2}\right) \sin(2\lambda_N)] \quad (17) \end{aligned}$$

将公式(17)泰勒展开,令低阶项为零,利用待定系数法得到:

$$g_1 = \frac{1}{1945}, g_2 = -\frac{1}{92400}, K_{13} = \frac{697}{1636}, K_{12} + K_{23} = \frac{9475}{6843} \quad (18)$$

图 2 为采样周期为 0.001 s 与 0.01 s 时经典圆锥算法误差、优化的标准圆锥算法误差以及经典圆锥算法极限的对比。

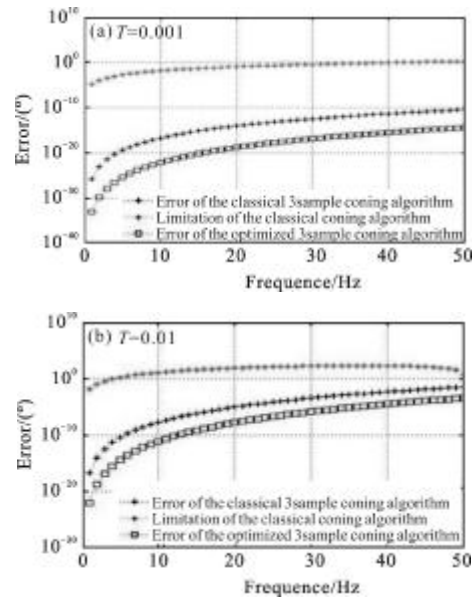
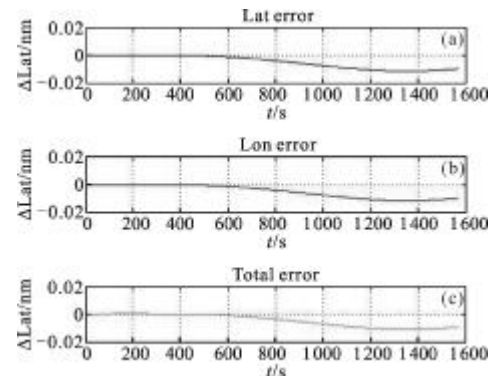


图 2 不同算法误差对比

Fig.2 Error comparison of different algorithms

由以上的分析可知,在振动条件下,圆锥运动补偿应当采用标准优化圆锥运动补偿算法,利用捷联惯导基本原理,设计了激光陀螺捷联惯导实时导航程序,采样周期为 0.001 s,圆锥运动补偿采用标准优化圆锥运动 3 子样补偿算法,初始对准 360 s,对准结束后,对惯组施加 1g 随机振动,到量级后保持 10 min,导航结果如图 3 所示。



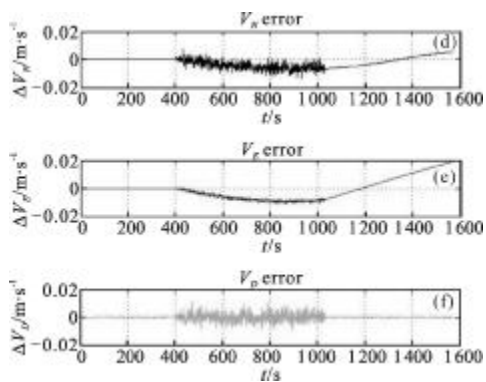


图 3 施加 1g 随机振动时激光陀螺捷联惯导的导航误差
Fig.3 Navigation error of SINS under 1g random vibration

4 结 论

在经典圆锥运动补偿算法中, 等效旋转矢量的理论值与激光陀螺输出的角增量之间无法建立直接的等价关系, 只有在半锥角 α 为小量时, 才能用陀螺总角增量 $\Delta\theta$ 代替等效旋转矢量 Φ_m 进行导航解算, 从而在每个姿态更新周期内都将产生圆锥效应, 由于姿态更新周期不可能无限小, 故经典圆锥运动补偿算法中存在不可逾越的极限, 仿真结果表明: 在一定半锥角和圆锥频率条件下, 由于极限精度的存在, 当极限精度产生限制作用时, 提高圆锥运动补偿精度的唯一途径是缩短圆锥补偿周期, 而不能简单地通过增加子样数来实现。标准优化圆锥运动补偿算法能更好的利用样本信息, 算法误差更小, 更适合振动条件下的圆锥运动补偿, 试验结果表明, 该优化算法对于提高振动条件下激光陀螺捷联惯导系统的精度有一定的优越性。

参考文献:

- [1] David H Titterton, John L Weston. Strpdown Inertial Navigation Technology [M]. London: Peter Peregrinus on Behalf of the Institute of Electrical Engineer, 2004.
- [2] Mario Ignagni. Optimal sculling and coning algorithms for analog-sensor systems[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2012, 35(3): 234-239.
- [3] Yan Gongmin, Yan Weisheng, Xu Demin. Limation of error estimation for classic coning compensation algorithm [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(4): 379-385. (in Chinese)
- [4] Jiang Y F, Lin Y P. On the rotation vector differential equation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1991, 27(1): 484-490.
- [5] Zhou Pu, Wang Xingshu, Qin Shiqiao, et al. Errors modeling and simulating in laser gyro strapdown attitude surveying system [J]. Infrared and Laser Engineering, 2007, 36(4): 2375-2379. (in Chinese)
- [6] Yu Hailong, Lv Xinming, Tang Jianxun, et al. Establishment and analysis of high-order error model of laser gyro SINS [J]. Infrared and Laser Engineering, 2013, 42(9): 2375-2379. (in Chinese)
- [7] Wei Guo, Wang Yu, Long Xingwu. Filtering method of mechanically dithered RLG's data drift [J]. Infrared and Laser Engineering, 2011, 40(2): 305-309. (in Chinese)
- [8] Huang Lei, Liu Jianye, Zeng Qinghua. New coning algorithm based on high-order error compensation model [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2013, 21(1): 37-41. (in Chinese)
- [9] Zhang Zhaofei, Yang Mengxing, Wu Mingqiang. Improved optimization algorithm for strpdown inertial navigation system [J]. Modern Defence Technology, 2012, 40(5): 80-85. (in Chinese)
- [10] Chen Jianfeng, Chen Xiyuan, Zhu Xuefen. An improvec coning algorithm based on second optimization [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2012, 20(2): 131-135. (in Chinese)

379-385. (in Chinese)

严恭敏, 严卫生, 徐德民. 经典圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的局限性研究[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(4): 379-385.

[4] Jiang Y F, Lin Y P. On the rotation vector differential equation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1991, 27(1): 484-490.

[5] Zhou Pu, Wang Xingshu, Qin Shiqiao, et al. Errors modeling and simulating in laser gyro strapdown attitude surveying system [J]. Infrared and Laser Engineering, 2007, 36(4): 2375-2379. (in Chinese)

周朴, 王省书, 秦石乔, 等. 激光陀螺捷联姿态测量系统误差建模与仿真研究 [J]. 红外与激光工程, 2007, 36(4): 2375-2379.

[6] Yu Hailong, Lv Xinming, Tang Jianxun, et al. Establishment and analysis of high-order error model of laser gyro SINS [J]. Infrared and Laser Engineering, 2013, 42(9): 2375-2379. (in Chinese)

于海龙, 吕信明, 汤建勋, 等. 激光捷联惯导系统高阶误差模型建立与分析[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(9): 2375-2379.

[7] Wei Guo, Wang Yu, Long Xingwu. Filtering method of mechanically dithered RLG's data drift [J]. Infrared and Laser Engineering, 2011, 40(2): 305-309. (in Chinese)

魏国, 王宇, 龙兴武. 二频机抖激光陀螺漂移数据滤波方法[J]. 红外与激光工程, 2011, 40(2): 305-309.

[8] Huang Lei, Liu Jianye, Zeng Qinghua. New coning algorithm based on high-order error compensation model [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2013, 21(1): 37-41. (in Chinese)

黄磊, 刘建业, 曾庆化. 基于高阶补偿模型的新圆锥算法 [J]. 中国惯性技术学报, 2013, 21(1): 37-41.

[9] Zhang Zhaofei, Yang Mengxing, Wu Mingqiang. Improved optimization algorithm for strpdown inertial navigation system [J]. Modern Defence Technology, 2012, 40(5): 80-85. (in Chinese)

张朝飞, 杨孟兴, 吴明强. 一种改进的捷联惯导系统优化算法 [J]. 现代防御技术, 2012, 40(5): 80-85.

[10] Chen Jianfeng, Chen Xiyuan, Zhu Xuefen. An improvec coning algorithm based on second optimization [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2012, 20(2): 131-135. (in Chinese)

陈建锋, 陈熙源, 祝雪芬. 一种基于二次优化的改进圆锥算法 [J]. 中国惯性技术学报, 2012, 20(2): 131-135.