

## 角谱传输数值模拟中参数优化分析

崔文达, 杜少军

(国防科学技术大学 光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 基于角谱理论推导出了光学模拟中取样参数的优化选取方法, 重点分析了其与实际光学系统参数之间的相互制约关系, 并通过数值计算进行了验证。利用控制变量的方法, 分别探讨了取样数目、取样间隔对细节误差与轮廓误差的影响, 以及光学系统的近场和远场取样参数的变化。结果表明: 根据所得限制条件选取的取样参数能够获得较为精确的模拟结果, 且能够对计算误差进行较好的解释; 取样数、取样间隔是互相制约的, 需结合实际的光学系统进行选取。

**关键词:** 参数优化; 数值模拟; 角谱传输

中图分类号: TN012 文献标志码: A 文章编号: 1007-2276(2014)09-2935-06

## Analysis of parameters optimization in numerical simulation of angular spectrum transmission

Cui Wenda, Du Shaojun

(School of Optoelectronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Based on the angular spectrum theory, an parameter optimization method of optical analog was deduced, which focused on the restrictive relationship between calculation parameters and the actual optical system, and it was validated by numerical calculation. By controlling the variables, the impact of sampling number and interval to detail error and contour error was studied, as well as the sampling parameters' near-field and far-field change of an optical system. The results shows that the parameters calculated from the sampling restriction obtain a more accurate simulation result, and the calculation error can be better explained; the selection of sampling number and interval is mutually conditioned, which also depends on the actual optical system.

**Key words:** parameter optimization; numerical simulation; angular spectrum transmission

收稿日期: 2014-01-10; 修订日期: 2014-02-20

作者简介: 崔文达(1988-), 男, 硕士生, 主要从事自适应光学方面的研究。Email: cui\_wenda@126.com

导师简介: 杜少军(1972-), 男, 研究员, 博士, 主要从事高能激光技术方面的研究。Email: d\_sj@tom.com

## 0 引言

对于复杂光学系统,其元器件的加工难度和成本较高,因而数值模拟成为研究光学现象的常用手段<sup>[1-2]</sup>,与实验方法相比,数值模拟具有参数选择灵活、容易实现、目的性强等优点。在光学的数值模拟中,基于角谱理论进行数值模拟所得的计算结果较为精确,计算速度较快,是描述光学传输过程的基本方法之一<sup>[3-4]</sup>。角谱传输的数值模拟实际上是离散傅里叶变换与逆变换的过程,因此取样参数的选择受到取样规则、衍射特性等方面的限制,选择合适的取样参数可以获得较快的计算速度以及较高的精度<sup>[5-6]</sup>。相反,如果取样参数不正确则会获得较差的精度甚至错误的结果,其中取样点数目、取样间隔是决定数值模拟精度的主要参量。一般文献已对光学传输的数值模拟参量的选取进行了较多的研究,通常结合湍流或热晕的相关特性进行推导<sup>[7-9]</sup>,因此所得限制条件较多,过程比较复杂,对角谱传输这一基本过程的物理含义讨论反而不足。如果模拟计算是为实际的光学实验作参考,那么模拟参数的选取还要充分考虑光学系统的限制作用,而此前对这一方面的讨论也较少。文中从 Nyquist 取样规则和离散傅里叶变换的基本原理出发,基于角谱传输与空间频率的关系推导出了数值模拟参数  $N$ 、 $\delta$  所需满足的条件,通过模拟计算得出  $N$ 、 $\delta$  取值对计算精度的影响,并对不同的取值所造成的误差进行了分析。

## 1 理论推导

### 1.1 角谱与空间频率

根据角谱传输理论,在相干照明的情况下,输入面或输出面上的光场分布  $g(x,y)$  可以看作不同空间频率的平面波的组合。有  $g(x,y)$  的傅里叶变换形式:

$$g(x,y) = \iint G(\varepsilon, \eta) \exp[-i2\pi(\varepsilon x + \eta y)] d\varepsilon d\eta \quad (1)$$

式中:  $\exp[-i2\pi(\varepsilon x + \eta y)]$  可看作是空间平面波的表达式。每一空间频率  $(\varepsilon, \eta)$  对应着不同传播方向的平面波,于是空间频率  $(\varepsilon, \eta)$  与方向余弦  $(\cos\alpha, \cos\beta)$  之间存在如下关系式<sup>[10]</sup>:

$$\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\lambda}, \eta = \frac{\cos\beta}{\lambda} \quad (2)$$

因此  $G(\varepsilon, \eta)$  可写作角谱形式  $G\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ , 在相干照明的条件下,光场的傅里叶变换谱与角谱存在着对应关系。

### 1.2 $\delta$ 的选取

根据取样定理,相邻采样点之间的相位差不应大于  $\pi$ ,可以得到  $\delta$  满足的关系式:

$$\delta \leq \frac{1}{2f_{\max}} \quad (3)$$

式中:  $f_{\max}$  为最大空间频率,空间频率可变换为方向余弦的形式,所以上式又可表示为:

$$\delta_1 \leq \frac{1}{2\alpha_{\max}} \quad (4)$$

式中:  $\alpha_{\max}$  为角频率的最大值,即  $D_2$  面上可接收到的光线的角度的最大值。

如图 1 所示,实际应用中光学观测系统的口径是有限的,设为  $D_2$ ,物面的口径设为  $D_1$ 。此光学系统允许通过的角频率是有限的,若由  $D_1$  发出的光恰好落在  $D_2$  面内,说明小于此时对应的角频率光时对应的可以被完全接收,若恰好落在  $D_2$  面外,说明大于此时对应的角频率的光不能被接收,于是光学系统允许通过的角频率范围为<sup>[10]</sup>:

$$\frac{D_2 - D_1}{2\lambda z} \leq \alpha \leq \frac{D_2 + D_1}{2\lambda z} \quad (5)$$

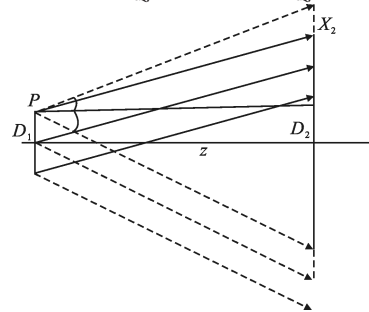


图 1 角谱衍射示意图

Fig.1 Schematic diagram of angular spectrum diffraction

取样间隔  $\delta_1$  满足的条件为:

$$\frac{\lambda z}{D_2 + D_1} \leq \delta_1 \leq \frac{\lambda z}{D_2 - D_1} \quad (6)$$

已知傅里叶变换会将输入函数进行周期性的延拓,为了避免虚拟的输入面影响  $D_2$  面上的成像,设衍射平面上数值模拟范围为  $x_2$ ,且  $x_2$  大于  $D_2$ 。对  $D_1$

的上端点  $P$  来说,可通过的最大角频率为  $\alpha_{\max}$ ,则<sup>[11]</sup>

$$\alpha_{\max} = \frac{D_1 + D_2}{2z} + \left( \frac{x_2}{z} - \frac{D_1}{2z} \right) \quad (7)$$

$$x_2 = \frac{n\delta_2}{2} = \frac{D_1\delta_2}{2\delta_1} \quad (8)$$

代入式可得像面取样间隔  $\delta_2$  需满足的条件:

$$\delta_2 \leq \frac{\lambda z}{D_1} - \frac{D_2\delta_1}{D_1} \quad (9)$$

因此,在相干照明的情况下,对物面的取样频率只需满足公式(6)、(9)即可。

### 1.3 $N$ 的选取

取样点数目对模拟计算的精确度具有重要影响,为了获得较为完整的信息,希望尽可能扩大对入射光的取样范围,但是考虑到计算机的性能限制以及光学观测设备的局限性,只需将取样范围控制在一个较为合理的程度即可。

角谱传输的计算实际上是傅里叶变换与反变换的过程,以入射光束  $g(x)$  为例,取样范围的限制体现在入射函数与  $\text{rect}()$  函数的乘积上,而其频谱面上的抖动与模糊是受  $\text{rect}()$  的傅里叶变换函数  $\text{sinc}()$  的影响。

$$g(x) \cdot \text{rect}(x/L) \Leftrightarrow G(f) \otimes [L\text{sinc}(Lf)] \quad (10)$$

由公式(10)可知,取样空间  $L$  较小时,  $\text{sinc}()$  函数的边界波动会更加剧烈,从而造成频谱面图像的抖动和边界模糊。因此,确定取样范围需要达到的要求就是在  $D_2$  面上产生的抖动和模糊尽可能小。若像平面上的辐照范围为  $D_i$ ,则取样数  $N$  需足够大,使得模拟计算所需的取样范围大于  $D_i$ 。

$$D_i = \frac{D_1\delta_2}{\delta_1} + 2\alpha_{\max}z = \frac{D_1\delta_2}{\delta_1} + \frac{\lambda z}{\delta_1} \quad (11)$$

$$N \geq \frac{D_i}{\delta_2} \quad (12)$$

$$N \geq \frac{D_1 + \lambda z}{\delta_1 \delta_2} \quad (13)$$

角谱传输的计算过程中,同样需要对传递函数进行离散化处理,于是传递函数需要满足取样定理。传递函数表达式为:

$$H(\varepsilon, \eta) = \exp(ikz\sqrt{1 - (\lambda\varepsilon)^2 - (\lambda\eta)^2}) \quad (14)$$

在非涅耳衍射条件下,传递公式可近似为:

$$H(\varepsilon, \eta) = \exp(ikz)\exp(-i\pi\lambda z(\varepsilon^2 + \eta^2)) \quad (15)$$

根据取样定理,  $H(\varepsilon, \eta)$  的变化率须小于或等于  $\pi$ ,即满足:

$$\Delta\varepsilon \left| \frac{\partial \pi\lambda z(\varepsilon^2 + \eta^2)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon, \eta = \frac{N}{2D_1}} \leq \pi \quad (16)$$

$$N \geq \frac{\lambda z}{\delta_1^2} \quad (17)$$

实际计算时,光学系统的参数通常是已知的,自变量为不同大气条件下的入射光。因此可以基于光学系统参数,如  $D_1, D_2$  等,确定对入射光的模拟范围;反之,也可针对被模拟的入射光的特性优化计算参数,若光学系统的分辨率较高,而所需模拟的光场分布并不复杂,考虑到计算机性能以及计算效率,可以根据以上推导选取较少的取样数;若所需模拟的光场分布比较复杂,则需要适当增加取样数以获得更高的模拟精度。一般情况下,公式(6)并不是严格的限制条件,可用于初步确定取样间隔的数量级。

## 2 计算与分析

### 2.1 采样数 $N$ 对模拟精度的影响

设计一个入射口径为  $D_1$ ,出射口径为  $D_2$ ,传输距离为  $z$ ,波长为  $\lambda$  的简单光学系统,在入射光为矩形光束的情况下进行数值模拟。其中  $D_1 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $D_2 = 4 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $z = 0.1 \text{ m}$ ,  $\lambda = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$ ,根据条件公式(9)、(13)、(17),将  $N$  的值在  $\delta_1 - \delta_2$  平面上投影,结果如图 2 所示。

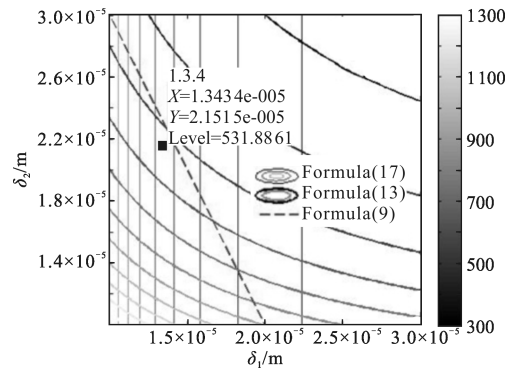


图 2  $z=0.1 \text{ m}$  时取样参数的限制条件

Fig.2 Sample limits of  $z=0.1 \text{ m}$

考虑到计算机的性能,在虚线下方选取一合适的数值  $\delta_1 = 1 \times 10^{-5} \text{ m}$ ,  $\delta_2 = 2 \times 10^{-5} \text{ m}$ ,  $N = 500$ 。输入光场为矩形光束,计算结果如图 3(a) 所示。

若取样点减少,模拟结果将会发生变化。在光学系统参数及取样间隔不发生变化的情况下,取  $N = 300$ ,  $N = 200$ ,模拟计算所得光强的三维分布以及截面光强分布如图 3(b)、(c) 所示,其中截面图像中实线为光场分布的理论值,虚线为角谱传输离散化的计算

结果。

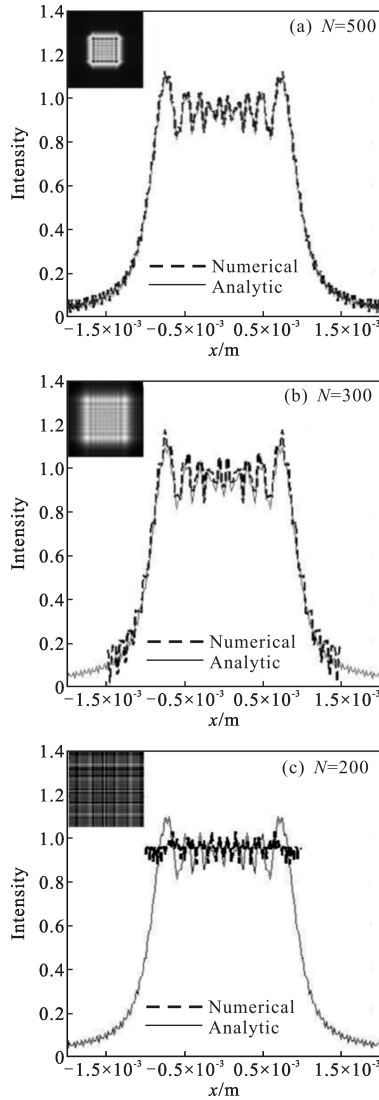


图 3  $z=0.1$  m 时的模拟结果  
Fig.3 Simulation results of  $z=0.1$  m

在  $N=500$  时，计算所得的光强分布是比较准确的衍射图样，离散化的结果与连续函数的计算结果吻合度较高； $N=300$  时边缘部分开始发生抖动，但是幅度较小，保持在 0.2 以下。随着取样数的减少，计算所得的光强分布畸变越大，在  $N=100$  时，光强分布开始出现明显的失真，由图 3(c) 可以看出，计算结果已不能看作正确的衍射图像。根据 1.3 节的分析，说明所采用的取样数过少，造成对入射面的采样范围过小，因而无法取得正确的模拟结果。

令  $z=1$  m，光学系统其余参数不变，代入限制条件，得到如图 4 所示的结果。在虚线下方选取合适的取值点， $N=50$ ， $\delta_1=1\times 10^{-4}$  m， $\delta_2=2\times 10^{-4}$  m 计算结果如

图 5(b) 所示。

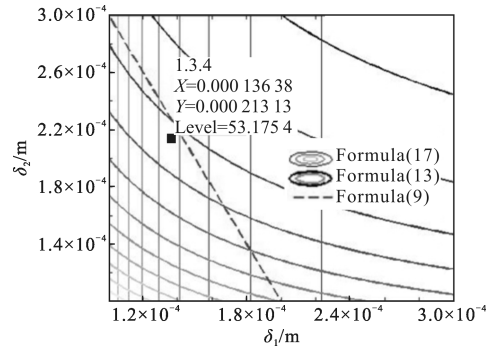


图 4  $z=1$  m 时取样参数的限制条件  
Fig.4 Sample limits of  $z=1$  m

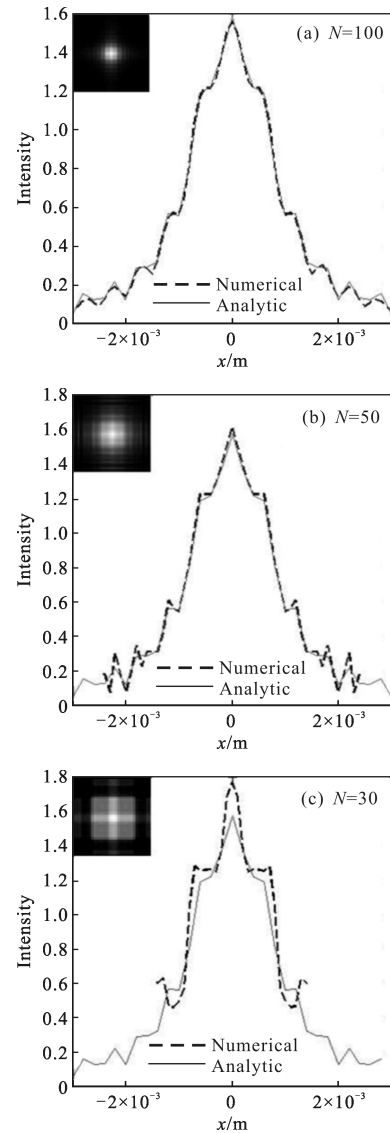


图 5  $z=1$  m 时的模拟结果  
Fig.5 Simulation results of  $z=1$  m

由图 5 可以看出，与  $z=0.1$  m 时的情况相比，虽

然取样数明显减少,但是在  $N=100, 50$  时的光强分布基本与连续函数一致,只是分辨率较低。在  $N=30$  时光强分布有较明显的畸变,说明此时的取样数不足。可见光学系统参数对取样数有较明显的影响,在精度要求不高的情况下,此光学系统需要较少的采样数,较大的采样间隔即可完成模拟计算。

文中采用均方根 RMS 评估离散化的计算结果与理论值的误差。由图 6 可以看出,在光学系统参数不变、选取合适的取样间隔的情况下,RMS 值随着取样数  $N$  的增大呈下降趋势,而且在同一 RMS 值下, $z=0.1\text{m}$  的光学系统所需取样数大于  $z=1\text{m}$  的光学系统所需取样数。

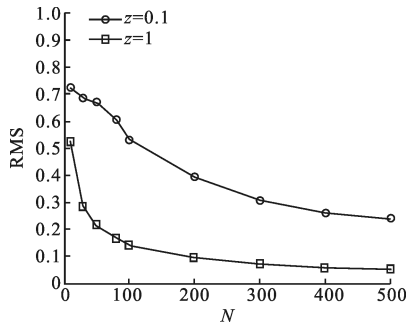


图 6 不同  $z$  值下 RMS 随取样数  $N$  的变化  
Fig.6 RMS changes for different values of  $N$

### 2.2 取样间隔 $\Delta$ 对模拟精度的影响

令  $z=1\text{m}, N=500$ , 远大于图 4 中条件所要求的  $N=54$ 。分别取  $\delta_1=1\times 10^{-4}\text{m}, \delta_2=2\times 10^{-4}\text{m}$  和  $\delta_1=1\times 10^{-5}\text{m}, \delta_2=2\times 10^{-5}\text{m}$ , 这两种情况下物面上的模拟尺度均大于光场分布范围  $D_1$ 。所得计算结果如图 7 所示,在  $\delta$  取值较小时离散化的计算结果与菲涅耳衍射的解析解相差较大,在  $\delta$  取值较大时反而吻合得较好。

从图 7(a)可以看出:模拟结果基本保持了衍射图像的低阶轮廓,但是细节部分丢失比较严重。由于物面上的模拟范围已经足够大,所以这种情况并不是

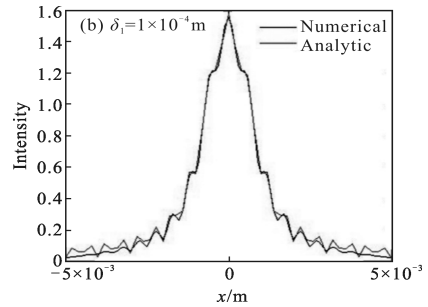
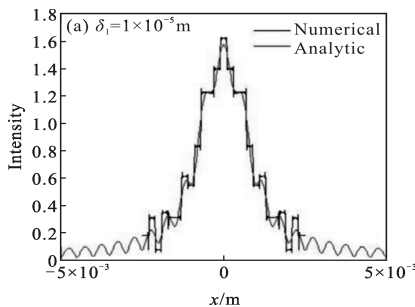


图 7  $z=1\text{m}$  时不同  $\delta$  取值的模拟结果  
Fig.7 Simulation results of different  $\delta$  with  $z=1\text{m}$

物面采样数  $N$  不足的原因。根据公式(3),过小的  $\delta$  值会导致最大角频率的值  $\alpha_{\max}$  超过衍射面  $x_2$  允许通过的范围,从而造成对高角谱成分的模拟不足,而较高的角频率代表着光场的高频部分,即图像的细节,因此模拟结果的细节部分误差较大。

同样,若令  $z=0.1\text{m}, N=500$ , 分别取  $\delta_1=1\times 10^{-4}\text{m}, \delta_2=2\times 10^{-4}\text{m}$  和  $\delta_1=1\times 10^{-5}\text{m}, \delta_2=2\times 10^{-5}\text{m}$ , 这两种情况下物面上的模拟尺度也均大于光场分布范围  $D_1$ , 计算结果如图 8 所示。与  $z=1\text{m}$  时相反,在  $\delta$  取值较大时离散化的计算结果与菲涅耳衍射的解析解相差较

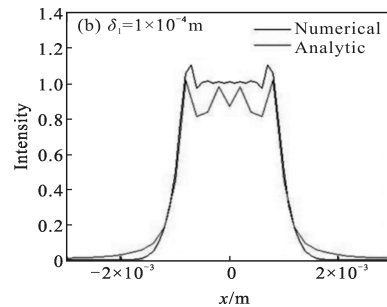
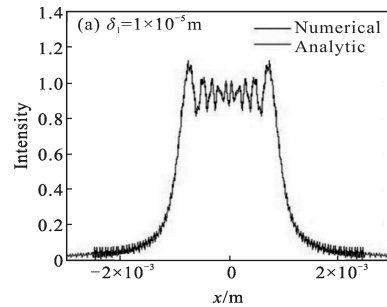


图 8  $z=0.1\text{m}$  时不同  $\delta$  取值的模拟结果  
Fig.8 Simulation results of different grid spacing with  $z=0.1\text{m}$

大,在  $\delta$  取值较小时吻合度较好。这是由于在  $N=500, \delta_1=1\times 10^{-5}\text{m}, \delta_2=2\times 10^{-5}\text{m}$  时,所取参数已经满足了图 2 所示的限制条件,由图 1 可以看出,当衍射距

离  $z$  减小时,模拟计算的范围  $x_2$  可以接收更高的角频率,已经达到了  $\delta_1=1\times 10^{-5}\text{m}$  所对应的角谱范围的要求。图 8(b)中离散计算值与解析值的误差显然也与图 7(a)不同,并不是由于高频部分丢失造成的,而是由于取样间隔过大,没有满足 Nyquist 取样条件造成的。

综合以上的分析,取样间隔  $\delta$  的选取并不是越小越好,需要同时考虑参数  $N$  和  $z$  的影响,因此选取模拟参数的一般过程可以概括为:首先,将光学系统参数带入公式(9)、(13)、(17),得到有关  $N, \delta$  的限制条件,然后参考公式(6)及所使用计算机的性能选取合适的取样参数。

### 3 结论

文中基于角谱传输理论的物理含义,结合取样定理及离散傅里叶变换的基本性质推导出了角谱传输过程的数值模拟中取样间隔,取样数目需满足的限制条件。数值模拟结果表明:按照所得限制条件选取的取样参数能够得到较精确的模拟结果;在计算机性能允许的情况下,数值模拟误差是随着取样数的增加而减少的,在取样数小于某一值时模拟结果会完全失真;取样间隔的选取比较复杂,同时受到取样数、光学系统参数的影响,应在满足限制条件的情况下进行综合考虑。文中得出的取样条件比较简洁,并且与基本的光学传播过程紧密结合,可以作为复杂光学条件下数值模拟参量的初步选定依据。

### 参考文献:

- [1] Sun Zhongtao, Sun Xiaoquan, Zou Jiwei. Numerical analysis of thermal blooming induced by pulsed laser propagation in atmosphere[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2007, 36(2): 189-193. (in Chinese)  
孙中涛, 孙晓泉, 邹继伟. 脉冲激光大气传输热晕数值分析[J]. 红外与激光工程, 2007, 36(2): 189-193.
- [2] Qian Xianmei, Zhu Wenyue, Rao Ruizhong. Numerical simulation of turbulent effects of laser propagation along a ground-space slant atmospheric path [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2008, 37(5): 787-792. (in Chinese)  
钱仙妹, 朱文越, 饶瑞中. 地空激光大气斜程传输湍流效应的数值模拟分析 [J]. 红外与激光工程, 2008, 37(5): 787-792.
- [3] Wu Changjiang, Zhao Wei, Zhou Ping, et al. A numerical simulation algorithm of the optical fractional Fourier transform based on angular spectrum theory [J]. *Optical Technique*, 2007, (S1):144-146. (in Chinese)  
吴长江, 赵玮, 周萍, 等. 一种基于角谱理论的光学 FRFT 的数值模拟算法[J]. 光学技术, 2007, (S1):144-146.
- [4] Li Junchang. FFT Computation of spectrum diffraction formular and its application in wavefront reconstruction of digital holography [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, 29(5): 1163-1167. (in Chinese)  
李俊昌. 角谱衍射公式的快速傅里叶变换计算及在数字全息波面重建中的应用[J]. 光学学报, 2009, 29(5): 1163-1167.
- [5] Mansell J D, Praus R, Coy S. Determining wave-optics mesh parameters for complex optical systems [C]//SPIE, 2007: 6675.
- [6] Guo Chengshan, Li Chuantao, Hong Zhengping. Suitability of different sampling methods for digital simulations of the optical diffraction[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, 28(3): 442-446. (in Chinese)  
国承山, 李传涛, 洪正平, 等. 光衍射数值模拟中不同抽样方法的适用性分析[J]. 光学学报, 2008, 28(3): 442-446.
- [7] Huang Yinbo, Wang Yingjian. Choosing computing parameters in the numerical simulation of laser propagation effects [J]. *Journal of Atmospheric and Environmental Optics*, 2007, 2(1): 23-27. (in Chinese)  
黄印博, 王英俭. 激光大气传输数值模拟中对计算参量的选取[J]. 大气与环境光学学报, 2007, 2(1): 23-27.
- [8] Qian Xianmei, Zhu Wenyue, Huang Yinbo, et al. Selection of computing parameters in numerical simulation of laser beam propagation in turbulent atmosphere[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, 37(10): 1986-1991. (in Chinese)  
钱仙妹, 朱文越, 黄印博, 等. 激光湍流大气传输数值模拟中计算参量的选取[J]. 光子学报, 2008, 37(10): 1986-1991.
- [9] Huang Yinbo, Wang Yingjian. Choosing computing parameters in the numerical simulation of thermal blooming effects[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2005, 17(1): 1-4. (in Chinese)  
黄印博, 王英俭. 热晕效应数值模拟中对计算参数的选取 [J]. 强激光与粒子束, 2005, 17(1): 1-4.
- [10] Su Xianyu, Li Jitao. Information Optics[M]. Beijing: Science Press, 1999. (in Chinese)  
苏显渝, 李继陶. 信息光学[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [11] Schmidt J D. Numerical Simulation of Optical Wave Propagation with Examples in Matlab [M]. Washington: SPIE, 2010.