

L_1 稀疏正则化的高光谱混合像元分解算法比较

邓承志, 张绍泉, 汪胜前, 田 伟, 朱华生, 胡赛凤

(南昌工程学院 信息工程学院, 江西 南昌 330099)

摘 要: 基于稀疏性的高光谱解混是近年来高光谱混合像元分解的研究热点。主要研究了 L_1 正则化的高光谱混合像元分解算法。首先分析了 L_1 正则化的三种解混模型, 即无约束、非负约束和全约束模型; 然后给出了三种模型对应的数值求解算法; 最后, 采用模拟的和真实的高光谱数据进行实验, 比较了三种高光谱混合像元分解算法的效果。实验结果表明: 三种模型均具有很好的高光谱混合像元分解精度(SRE), 其中全约束模型最好, 非负约束模型次之, 无约束模型最差; 全约束模型在信噪比低和端元数多的情况下, 仍然获得较高的 SRE。

关键词: 高光谱; 混合像元分解; 稀疏性; 增广拉格朗日

中图分类号: TP753 文献标志码: A 文章编号: 1007-2276(2015)03-1092-06

Hyperspectral unmixing algorithm based on L_1 regularization

Deng Chengzhi, Zhang Shaoquan, Wang Shengqian, Tian Wei, Zhu Huasheng, Hu Saifeng

(Department of Information Engineering, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China)

Abstract: Hyperspectral unmixing based on sparsity is a research hotspot in recent years. This paper studies the hyperspectral unmixing algorithms based on L_1 regularization. First we analyzed three unmixing models, including unconstrained model, non-negative constraint model and full-constrained model. And then the corresponding algorithms are presented. In the end, both simulated and real hyperspectral data sets are used to compare and evaluate the proposed three hyperspectral unmixing algorithms. Experimental results demonstrate that three models all have good high-precision. The full constrained model achieves the best unmixing precision (SRE). The non-negative constrained model is better. And the unconstrained model is worst. In particular, the fully constrained model achieves the higher SRE under the low signal to noise ratio and a large amount of endmembers situation.

Key words: hyperspectral; unmixing; sparsity; augmented Lagrangian

收稿日期: 2014-07-08; 修订日期: 2014-08-10

基金项目: 国家自然科学基金(61162022, 61362036); 江西省自然科学基金(20132BAB201021);
江西省科技落地计划(KJLD12098); 江西省教育厅科技项目(GJJ12632)

作者简介: 邓承志(1980-), 男, 副教授, 博士, 主要从事遥感影像处理方面的研究。Email: dengchengzhi@126.com

0 引言

高光谱遥感影像具有光谱分辨率高, 图谱合一的特点。但于受到传感器的像元大小对空间分辨率的限制以及自然界地物的复杂多样性的影响, 高光谱遥感影像中的一个像元所包含的地物可能并不单一, 导致一个像元对应的光谱曲线可能由多种不同物质的光谱曲线混合而成, 使得高光谱遥感影像中存在大量的混合像元。而混合像元的存在, 影响了地物的识别和分类精度^[1]。因此, 如何解决混合像元分解问题, 成为高光谱影像分析和量化应用的关键。

混合像元分解是采用特定的方法, 从混合像元中提取典型地物(端元)的光谱, 并计算出这些地物所占的比例(丰度)。高光谱混合可以分为线性混合和非线性混合两种模式。由于线性光谱混合模型简单、效率高、物理含义明确, 是当前混合像元分解研究的主流。传统的高光谱线性混合像元分解方法可以分为基于统计的方法和基于几何的方法两类^[2]。

近年来, 随着压缩感知和稀疏表示理论的蓬勃发展, 学者们对稀疏性有了更为深刻的认识, 自 2009 年 Iordache 等人首次尝试将稀疏性约束加入到高光谱混合像元分解模型中^[3], 基于稀疏性的高光谱混合像元分解受到国内外学者的高度关注, 并成为新的研究热点^[4-8]。基于稀疏性的高光谱混合像元分解用已知的光谱库代替端元集合用于高光谱混合像元分解。此时, 基于稀疏性的混元分解问题等同于稀疏分解问题。

L_0 范数是常用的稀疏性正则子。 L_0 稀疏性好, 但 L_0 正则化的高光谱影像解混问题是一个 NP 组合优化问题, 求解过于复杂, 不利于实际的应用。2006 年, Tao 和 Candes 合作证明了在 RIP 条件下^[9], L_0 正则化问题与 L_1 正则化问题具有相同的解。因此 L_1 正则化问题能获得较为合理的稀疏解, 且具有快速算法。基于 RIP 条件, 文中用 L_1 范数代替 L_0 范数, 研究了 L_1 正则化的高光谱混合像元分解算法, 分析了 L_1 正则化的三种解混模型, 给出了三种模型对应的数值求解算法, 并比较了三种高光谱混合像元分解算法的效果。

1 基于稀疏性的混合像元分解模型

1.1 线性高光谱混合模型

线性混合模型假定一个像元的光谱是所有的纯

光谱(端元)的一个线性组合, 数学模型描述如下:

$$y_i = \sum_{j=1}^q m_{ij} x_j + n_i \quad (1)$$

式中: y_i 为混合像元; m_{ij} 为端元; x_j 为端元对应的丰度; n_i 为噪声。

假设实际高光谱仪具有 L 个波段, 模型(1)可以表示成矩阵的形式:

$$y = Mx + n \quad (2)$$

式中: y 为 $L \times 1$ 的像元列向量; M 为 $L \times q$ 的光谱矩阵; x 为 $q \times 1$ 的丰度列向量; n 为 $L \times 1$ 的噪声向量。由端元和丰度的物理意义, 端元满足非负约束, 丰度满足和为 1 约束和非负约束。非负约束表示为 $x_i \geq 0$ 。和为 1 约束表示为 $\sum_{j=1}^q x_j = 1$ 。

1.2 基于稀疏性的混合像元分解模型

假定用已知的光谱库代替端元矩阵, 则线性混合模型可以转化为:

$$y = Ax + n \quad (3)$$

式中: $A \in \mathbb{R}^{L \times p}$ 表示包含 p 个端元光谱信号的 $L \times p$ 的光谱库矩阵; x 为 $p \times 1$ 的列向量, 表示各个端元对应该混合像元的丰度系数; n 为 $L \times 1$ 的噪声向量。

根据高光谱混合像元的机理, A 中光谱数远大于公式(2)中 M 中的端元数 q , 即 x 中非零个数 $q < p$; 此时 y 在 A 中的丰度系数 x 就具有“稀疏性”。因此, 混合像元分解问题类似于稀疏问题。基于稀疏性的混合像元分解模型为:

$$\min_x \|x\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \|Ax - y\|_2^2 \leq \delta \quad (4)$$

式中: $\|x\|_0$ 为 x 的 L_0 范数, 表示 x 中非零系数的个数。尽管 L_0 范数能够很好地刻画稀疏性, 但是 L_0 范数的非凸性, 导致求解困难。而 L_1 范数是凸函数, 具有快速算法, 且能获得较为合理的稀疏解。通常用 L_1 范数代替 L_0 , 得到:

$$\min_x \|x\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|Ax - y\|_2^2 \leq \delta \quad (5)$$

线性高光谱模型有两个物理方面的约束, 即非负约束和和为 1 约束。基于此, 文中将基于稀疏性的混合像元分解模型分为三种, 即无约束模型, 非负约束模型, 全约束模型(包含非负、和为 1 约束)。三种模型描述如下:

无约束模型:

$$\min_x \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \quad (6)$$

非负约束模型:

$$\min_x \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t. } \mathbf{x} \geq 0 \quad (7)$$

全约束模型:

$$\min_x \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t. } \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \quad (8)$$

式中参数 $\lambda > 0$ 是正则化因子。

2 模型求解方法

无约束、非负约束和全约束混合像元分解模型是典型的稀疏约束优化问题。如何对稀疏约束的优化问题进行快速求解是近年来稀疏理论领域的一个热点问题。2010年, Bioucas-Dias 等人提出变量分裂增广拉格朗日算法^[10], 并将其成功应用到稀疏约束的图像复原。文中将变量分裂增广拉格朗日算法引入到三种混合像元分解模型的问题求解。

2.1 变量分裂增广拉格朗日算法

考虑一个由两个函数组成的非限制性优化问题:

$$\min_x f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{Gx}) \quad (9)$$

式中: \mathbf{G} 为一个单位矩阵, 令 $\mathbf{Gx} = \mathbf{u}$, 引入了新的变量 \mathbf{u} 作为函数 f_2 的因变量, 就得到一个限制性优化问题。利用增广拉格朗日乘数方法来求解问题, 得到以下公式:

$$(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{u}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Gx} - \mathbf{u} - \mathbf{d}_k\|_2^2 \quad (10)$$

$$\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_k - (\mathbf{Gx}_{k+1} - \mathbf{u}_{k+1}) \quad (11)$$

式中: μ 为罚参数; \mathbf{d}_{k+1} 为迭代误差。公式(10)是多变量的优化问题, 可采用交替迭代乘子算法来求解。算法流程如下:

算法 1: 变量分裂增广拉格朗日算法

(1) 初始化 $k=0, \mu > 0$

(2) 计算 $\mathbf{x}_{k+1} = \arg\min_x f_1(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Gx} - \mathbf{u}_k - \mathbf{d}_k\|_2^2$

(3) 计算 $\mathbf{u}_{k+1} = \arg\min_u f_2(\mathbf{u}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Gx}_{k+1} - \mathbf{u} - \mathbf{d}_k\|_2^2$

(4) 计算 $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_k - (\mathbf{Gx}_{k+1} - \mathbf{u}_{k+1})$

(5) 更新 $k=k+1$

(6) 停止迭代, 直到终止条件满足。

2.2 无约束模型的求解

采用变量分裂增广拉格朗日算法求解无约束模型(6)时, 对应的 $f_1(\mathbf{x})$ 和 $f_2(\mathbf{u})$ 分别为:

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad (12)$$

$$f_2(\mathbf{u}) = \lambda \|\mathbf{u}\|_1 \quad (13)$$

将公式(12)和公式(13)代入到算法 1 中的第 2 和 3 步进行求解, 通过迭代得到无约束混合像元分解模型的增广朗格朗日变量分裂迭代求解。其中步骤 2 和 3 中的优化问题的解为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{w} \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \text{soft}(\mathbf{v}_k, \lambda/\mu) \quad (15)$$

式中: $\text{soft}(\cdot)$ 为软阈值函数; $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{I}$; $\mathbf{w} = \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mu(\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k)$; $\mathbf{v}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{d}_k$ 。

2.3 非负约束模型的求解

与无约束模型的求解类似, 非负约束模型对应的 $f_1(\mathbf{x})$ 和 $f_2(\mathbf{u})$ 分别为:

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad (16)$$

$$f_2(\mathbf{u}) = \lambda \|\mathbf{u}\|_1 + \ell_{R^+}(\mathbf{u}) \quad (17)$$

式中: $\ell_{R^+}(\mathbf{x})$ 为非负约束的指示函数。将公式(16)和公式(17)代入到算法 1 中的第(2)和(3)步求解, 迭代得到非负约束模型的数值解。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{w} \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \max\{0, \text{soft}(\mathbf{v}_k, \lambda/\mu)\} \quad (19)$$

式中: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{I}$; $\mathbf{w} = \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mu(\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k)$; $\mathbf{v}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{d}_k$ 。

2.4 全约束模型的求解

类似, 全约束模型对应的 $f_1(\mathbf{x})$ 和 $f_2(\mathbf{u})$ 别为:

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 + \ell_{\{1\}}(\mathbf{1}^T \mathbf{x}) \quad (20)$$

$$f_2(\mathbf{u}) = \lambda \|\mathbf{u}\|_1 + \ell_{R^+}(\mathbf{u}) \quad (21)$$

$\ell_{\{1\}}(\mathbf{1}^T \mathbf{x})$ 表示和为 1 约束的指示函数。求解得到:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{w} - \mathbf{C}(\mathbf{1}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{w} - 1) \quad (22)$$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \text{soft}(\mathbf{v}_k, \lambda/\mu) \quad (23)$$

式中: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{I}$; $\mathbf{w} = \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mu(\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k)$; $\mathbf{v}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{d}_k$; $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{1}^T \mathbf{B}^{-1})^{-1}$ 。

3 实验仿真与比较

为了验证算法的有效性, 分别采用模拟和真实数据对三种算法性能进行测试和比较。混合像元分解的精度采用 SRE 信号重建误差(SRE) 来度量。SRE 数值越大, 说明算法的混分像元分解精度越高。其定义如下:

$$\text{SRE} = 10 \cdot \log_{10} \mathbf{E}[\|\mathbf{x}\|_2^2] / \mathbf{E}[\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2] \quad (24)$$

式中: \mathbf{x} 为实际的混合像元丰度系数; $\hat{\mathbf{x}}$ 为通过混合

像元分解算法求得的丰度系数。

3.1 模拟数据的测试

模拟数据光谱库 **A** 来自美国地质勘探局 USGS 的光谱库 Splib06。Splib06 由 498 条光谱组成,光谱波段数 $L=224$ 。任意选定 50 种光谱构造模拟数据光谱库 **A**,即 **A** 为 224×50 矩阵。高光谱影像 **y** 的混合像元数设定为 100,即空间分辨率为 10×10 。实验中三种算法的参数均设定为: $\lambda=10^{-4}$,迭代次数为 500 次。

图 1 给出了端元信噪比 $SNR=40$ dB 时,三种算法 SRE 随端元数 $k=2, \dots, 20$ 的变化曲线。从图 1 可以看出:在端元数较小时,三种算法的 SRE 差距较大;随着端元数的增加,三种算法的 SRE 逐渐下降, SRE 的差距也逐渐变小。总体来说,相比其他两种模型,无论端元数如何变化,全约束模型均获得最好的分解精度。

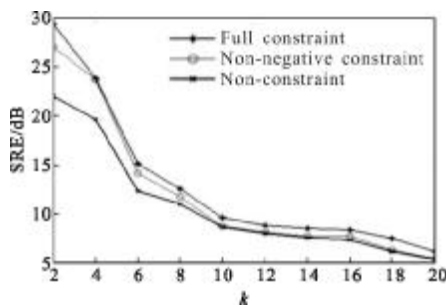


图 1 SRE 随端元数 k 的变化图
Fig.1 Plot of SRE values with k

图 2 给出了端元数 $k=5$ 时,三种算法的 SRE 随 SNR 的变化曲线。从图 2 可以看出,全约束模型获得最好的分解精度,非负约束模型次之,无约束模型最差。当 SNR 比较小时,三种算法的 SRE 差距较大,无约束模型甚至出现了负值,而当 SNR 逐渐变大,三种算法性能趋于相近。总体来讲,全约束模型获得最

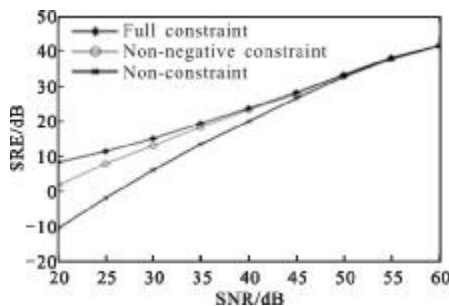


图 2 SRE 随 SNR 的变化图
Fig.2 Plot of SRE values with SNR

好的分解精度。特别地,在低信噪比环境下,全约束模型获得明显优于另外两种算法的分解精度。

图 3 给出了端元数 $k=4$,信噪比 $SNR=30$ dB 时,三种算法提取出的丰度图像的视觉效果图。其中,图(a)为原始丰度图像,图(b)~(d)分别为无约束、非负约束和全约束模型算法提取出的丰度图像。由图(b)可以看出:无约束模型获得的丰度图像模糊,且布满噪声。相对于无约束模型,非负约束模型提取出的丰度图像更加清晰,且噪声点更少。而全约束模型提取出的丰度图像最清晰,含有少量的噪声点,混合像元分解的精度最高。

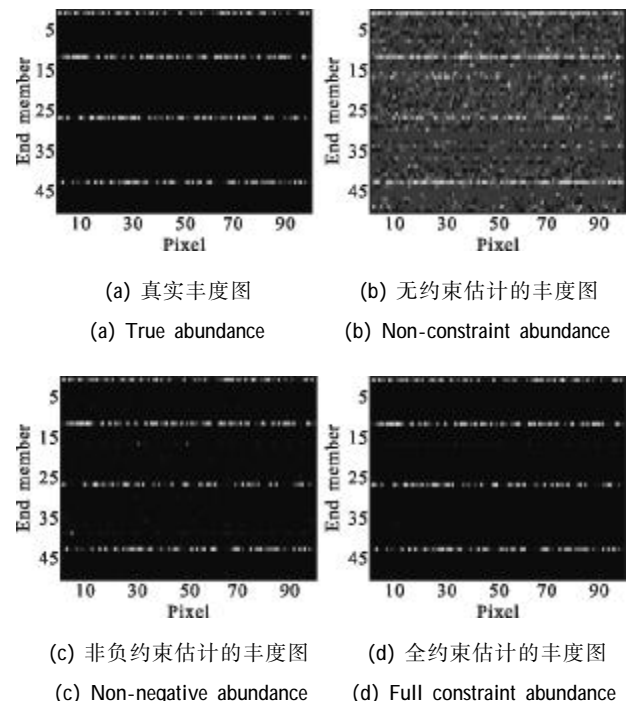
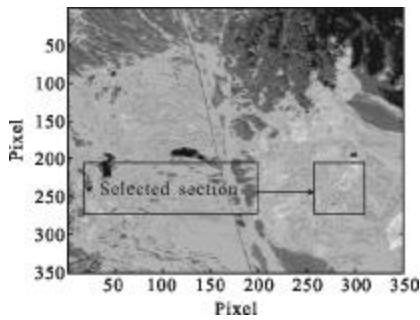


图 3 真实丰度系数图与估计的丰度系数图
Fig.3 True and estimated abundance fractions

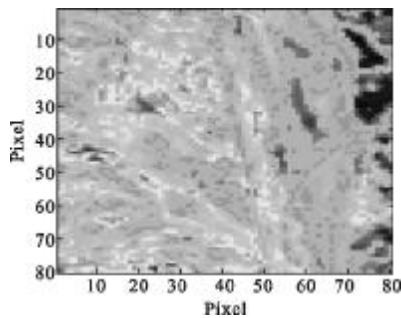
3.2 真实数据的测试

真实测试数据选择 AVIRIS 的 Cuprite 数据。影像为美国内华达地区影像,影像光谱分辨率(波段数)为 188,空间分辨率为 350×350 。为了计算方便,在真实测试影像中选取空间分辨率为 80×80 的区域进行实验,如图 4(a)所示。图 4(b)为截取的测试用影像。光谱库 **A** 采用 224×498 的 USGS 光谱数据库。为了使得光谱库 **A** 中光谱分辨率与测试影像光谱分辨率一致,将光谱库 **A** 的波段数截断为 188。实验中,参数 λ 和迭代次数与模拟数据的测试实验一致。



(a) 真实的高光谱数据

(a) Real hyperspectral data



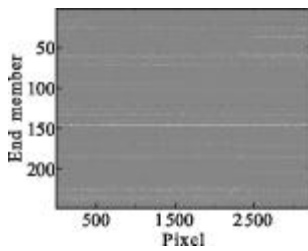
(b) 截取部分

(b) Selected section

图 4 真实的 AVIRIS Cuprite 高光谱数据

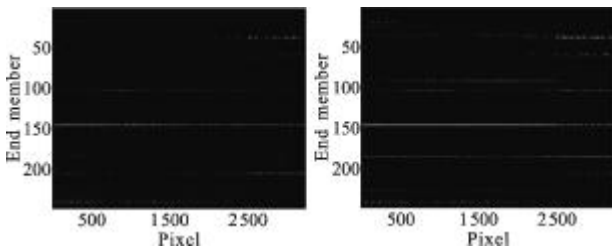
Fig.4 AVIRIS Cuprite hyperspectral scene used in experiments

图 5 给出了三种模型混合像元分解后提出的丰度图像。其中,图(a)~(c)分别对应无约束、非负约束



(a) 无约束估计的丰度系数图

(a) Non-constraint abundance



(b) 非负约束估计的丰度系数图 (c) 全约束估计的丰度系数图

(b) Non-negative abundance (c) Full constraint abundance

图 5 从真实 AVIRIS Cuprite 高光谱数据中估计出的丰度系数图

Fig.5 Fractional abundance estimations from AVIRIS Cuprite hyperspectral data

和全约束模型提取的丰度图像。从图可以看出无约束模型得到的丰度图像视觉效果不理想。由于无约束模型得到的丰度系数出现了负数,导致其背景图与另外两种不同。非负约束模型和全约束模型能够较准确地得到真实的丰度。但从结果来看,全约束模型的分解精度高于非负约束模型。

4 结论

文中首先研究了三种基于 L_1 正则化的高光谱影像混合像元分解模型和数值求解方法;然后,从模拟数据和真实数据两方面对无约束、非负约束、全约束混合像元分解算法性能进行比较与分析。实验结果表明:三种模型均具有很好的高光谱混合像元分解精度,其中全约束模型最好,非负约束模型次之,无约束模型最差。特别地,全约束模型更加适用于信噪比低和端元多的高光谱混合像元分解。由于只有在严格的条件下, L_1 问题与 L_0 问题的解才等价,因此 L_1 求解框架并不能保证获得满意的稀疏解。基于 L_1 正则化的高光谱影像混合像元分解算法仍有待进一步改进。找到稀疏性好、求解方便的稀疏因子,以获得更好的混合像元分解精度是下一步重点研究的工作。

参考文献:

- [1] Dias J M, Plaza A, Nicolas D. Hyperspectral unmixing overview: geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2012, 5 (2): 354 - 379.
- [2] Nirmal K, Mustard J F. Spectral unmixing [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2002, 19(1): 44 - 57.
- [3] Iordache M D, Dias J, Plaza A. Unmixing sparse hyperspectral mixtures [C]//First IEEE GRSS Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing, 2009, 4: 85 - 88.
- [4] Iordache M, Bioucas-Dias J M, Plaza A. Sparse unmixing of hyperspectral data[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2011, 49(6): 2014 - 2039.
- [5] Lu X Q, Wu H, Yuan Y. Manifold regularized sparse NMF for hyperspectral unmixing [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2013, 51(5): 2815 - 2826.
- [6] Zhao X L, Wang F, Huang T Z. Deblurring and sparse unmixing for hyperspectral images[J]. IEEE Transactions on

- Geoscience and Remote Sensing, 2013, 51(7): 4045-4058.
- [7] Wu Zhebin, Wei Zhihui, Sun Le, et al. Hyperspectral unmixing based on iterative weighted L_1 regularization [J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2011, 35(4): 431-435. (in Chinese)
吴泽彬, 韦志辉, 孙乐, 等. 基于迭代加权 L_1 正则化的高光谱混合像元分解[J]. 南京理工大学学报, 2011, 35(4): 431-435.
- [8] Iordache M D, Dias J, Plaza A. Total variation spatial regularization for sparse hyperspectral unmixing [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2012, 50(11): 4484-4502.
- [9] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [10] Afonso M V, Dias J, Figueiredo M. Fast image recovery using variable splitting and constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(9): 2345.