

激光陀螺捷联惯导系统的模观测标定方法

董春梅,任顺清,陈希军,王常虹

(哈尔滨工业大学 空间控制与惯性技术研究中心,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 为了减小转台误差对激光陀螺捷联惯组(SIMU)标定精度的影响,采用模观测法设计了正二十面体-12点的位置和速率试验计划。首先,利用在重力场下的12个静态位置标定加速度计的零偏、标度因子和安装误差矩阵;然后,采用外环角速率、中内环双轴翻滚至12点位置来标定陀螺的零偏、标度因子和安装误差矩阵;最后,利用SIMU框架坐标系为桥梁,实现了加速度计和陀螺参数坐标系的统一。仿真分析表明:该方法能有效抑制转台误差对SIMU标定结果的影响,当转台各轴系垂直度误差为角秒级且角位置误差小于1'时,加速度计和陀螺的标度因子相对误差和安装误差矩阵的标定误差均小于 10^{-5} ,加速度计零偏的标定误差小于 $10\ \mu\text{g}$,陀螺零偏的标定误差小于 $0.01(^{\circ})/\text{h}$ 与测量噪声处于同一数量级。

关键词: 模观测; 激光陀螺; 加速度计; 标定; 三轴转台

中图分类号: U666.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201847.0917007

Calibration method for the laser gyro strapdown inertial navigation system based on norm-observation

Dong Chunmei, Ren Shunqing, Chen Xijun, Wang Changhong

(Space Control and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: In order to reduce the influence of turntable's errors on the calibration accuracy of SIMU, the position and the rate test plans of the regular icosahedrons-12 points were designed by using norm observation of the specific force and the angular velocity vectors. Firstly, the twelve static positions were utilized to calibrate the accelerometers' biases, scale factors and mounting errors in the gravity field. Secondly, using single-axis rate and double-axis position mode, namely the outer axis of the three-axis turntable was working in angular rate mode, both the inner and the middle axes were in the twelve positions, the RLGs' biases, scale factors and mounting errors were calibrated. At the same time, unification of the accelerometer and the gyro parameter coordinate systems was realized by using the SIMU frame coordinate system. Finally, simulation analysis shows that this method can effectively suppress the influence of turntable's errors on the calibration results of SIMU, the relative calibration errors of the scale factors of the accelerometers' and the gyros', and the calibration errors of the installation error matrix are less than 10^{-5} , the calibration errors of accelerometer biases are less than $10\ \mu\text{g}$, the calibration errors of gyro biases are less than $0.01 (^{\circ})/\text{h}$ which are in the same order of magnitude of

收稿日期:2018-04-13; 修订日期:2018-05-17

基金项目:十三五装备预研项目(4141708031)

作者简介:董春梅(1986-),女,博士生,主要从事惯性组合测试方法方面的研究。Email: dcmjob@126.com

导师简介:任顺清(1967-),男,教授,博士生导师,博士,主要从事惯性技术和精密测试技术方面的研究。Email: renshunqing@hit.edu.cn

the measurement noises, in the situation that perpendicularities between the turntable's adjacent axis lines are at the arc second level and that angular position errors are less than 1'.

Key words: norm observation; laser gyro; accelerometer; calibration; three-axis turntable

0 引言

由于激光陀螺具有标度因子稳定、漂移误差变化小的特点,以激光陀螺为核心的惯性测量组合是目前最常用的高精度惯性测量单元。惯性测量组合的标定是激光陀螺捷联惯导系统进行导航解算的基础,它的标定精度会直接影响导航系统的精度^[1]。

传统的标定方法是利用高精度三轴转台,通过速率试验来标定陀螺仪的标度因子和安装误差,通过位置试验来标定加速度计标度因子、安装误差、零偏和高阶非线性误差以及陀螺仪的零偏^[2-4]。由于传统的标定方法大都基于转台进行标定,然而任何精密转台都存在角位置误差和转轴之间的不垂直度等误差源,为了抑制转台误差制约 IMU 的标定精度,大量文献设计了相关的标定方案^[5-14]。

为克服过分依赖转台的局限,荷兰学者 Lötters 在 1998 年提出了基于模观测的加速度计标定方法^[15]。模观测法无须转台提供精确的姿态信息,只需要根据加速度计的输便可辨识其模型参数,这大大减少了标定对转台的要求。后续参考文献[16-19]对模观测标定方法进行了研究,但模观测法没有在实际生产中得到广泛应用,主要是存在以下局限:一是这种方法在求解模型参数时需要解非线性方程,算法误差较大;二是地球自转角速率太小,对陀螺的输入激励不够容易产生较大的标定误差;三是陀螺和加速度计标定参数表示坐标系不统一。文中利用转动来增大陀螺的激励,对模观测法做了进一步改进;同时以 SIMU 框架坐标系为桥梁,实现了加速度计和陀螺标定参数表示坐标系的统一,并结合模观测法中矢量模不变的特点设计了正二十面体-12 点的位置和速率试验计划。

1 标定原理

为方便标定模型的建立,定义如下坐标:东北天地理坐标系 $o_n x_n y_n z_n$,陀螺仪敏感轴系为 $o_g x_g y_g z_g$,记为 g 系;加速度计敏感轴系为 $o_a x_a y_a z_a$,记为 a 系;

因安装误差的存在, g 系与 a 系均不是严格的正交坐标系。定义加表参数坐标系 $o_b x_b y_b z_b$ 为: x_b 轴与加速度计敏感轴单位矢量 x_a 重合, y_b 轴在 $x_a y_a$ 平面内且与 x_b 垂直, z_b 轴与 $x_b y_b$ 一起构成右手直角正交坐标系。同理,定义陀螺参数坐标系 $o_d x_d y_d z_d$ 。通常为方便标定误差模型参数,文中定义加表参数坐标系为载体坐标系^[20]。为将陀螺和加速度计标定参数表示坐标系统一,须定义 SIMU 框架坐标系 $o_k x_k y_k z_k$,该坐标系与 SIMU 固连,SIMU 框架坐标系的各轴与转台零位时的中、内、外环轴平行。

在理想情况下,上述坐标系在三轴转台初始位置时是重合的,它们与 IMU 的安装位置如图 1 所示。

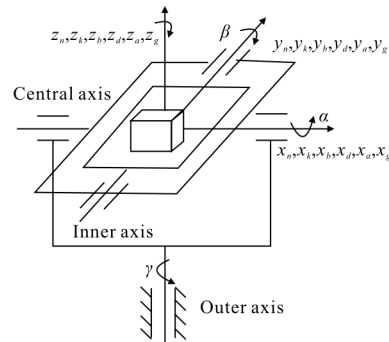


图 1 三轴转台初始位置与 IMU 安装示意图
Fig.1 Initial position of three-axis turntable and installation of IMU

静态条件下,SIMU 中比力输入满足:

$$C_b^n f^b = -g^n \quad (1)$$

当转台外环轴以角速率 ω_T^n 转动时,SIMU 中的角速度输入满足:

$$C_d^n \omega^d = \omega_e^n + \omega_T^n \quad (2)$$

式中: C_b^n 为载体坐标系到地理坐标系的姿态矩阵; C_d^n 为陀螺参数坐标系到地理坐标系的姿态矩阵; f^b 为比力矢量在载体坐标系 b 中的表示; g^n 为重力加速度; ω^d 为输入角速率矢量在陀螺参数坐标系 d 中的表示; ω_e^n 为地球自转角速度; ω_T^n 为转台提供的转

动角速度。

根据模观测的原理,对公式(1)和(2)分别取模得:

$$|f^b| = |C_b^n f^a| = |-g^n| = g \quad (3)$$

$$|\omega^d| = |C_d^n \omega^a| = \sqrt{(\omega_T^n)^2 + (\omega_e^n)^2 + 2\omega_T^n \cdot \omega_e^n \cdot \sin L} \quad (4)$$

式中: L 为当地的纬度。由公式(3)、(4)可知,比力与角速度矢量的模与姿态无关。下面利用比力和角速度的模作为观测量,对加速度计和陀螺的误差参数进行标定。

1.1 加速度计参数标定

只考虑零阶和一阶误差参数时,加速度计的輸出模型为:

$$\begin{bmatrix} K_x^a \tilde{N}_x^a \\ K_y^a \tilde{N}_y^a \\ K_z^a \tilde{N}_z^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\Delta K_x^a & 0 & 0 \\ \Delta\theta_{yx} & 1+\Delta K_y^a & 0 \\ \Delta\theta_{zx} & \Delta\theta_{zy} & 1+\Delta K_z^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^b \\ f_y^b \\ f_z^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x^a \\ b_y^a \\ b_z^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x^a \\ n_y^a \\ n_z^a \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中: $f^b = [f_x^b \ f_y^b \ f_z^b]^T$ 为比力矢量在载体坐标系中的表示; $K_i^a, \Delta K_i^a, b_i^a, n_i^a (i=x,y,z)$ 分别为*i*轴加速度计的标度因子、标度因子误差、零偏、测量噪声; $\Delta\theta_{ij} (i, j=x,y,z$ 且*i*≠*j*)为加坐标系*a*与载体坐标系*b*之间的安装误差角; $\tilde{N}^a = [\tilde{N}_x^a \ \tilde{N}_y^a \ \tilde{N}_z^a]^T$ 为单位时间内加

$$N_s^a = \begin{bmatrix} (N_x^a(1))^2 & (N_y^a(1))^2 & (N_z^a(1))^2 & -2N_x^a(1) \cdot N_y^a(1) & -2N_y^a(1) \cdot N_z^a(1) & -2N_x^a(1) \cdot N_z^a(1) & -2N_x^a(1) & -2N_y^a(1) & -2N_z^a(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (N_x^a(n))^2 & (N_y^a(n))^2 & (N_z^a(n))^2 & -2N_x^a(n) \cdot N_y^a(n) & -2N_y^a(n) \cdot N_z^a(n) & -2N_x^a(n) \cdot N_z^a(n) & -2N_x^a(n) & -2N_y^a(n) & -2N_z^a(n) \end{bmatrix}_{n \times 9}$$

$$K^a = [K_1^a \ K_2^a \ K_3^a \ K_4^a \ K_5^a \ K_6^a \ K_7^a \ K_8^a \ K_9^a]_{9 \times 1}^T$$

$$G = [1 \ \cdots \ 1]_{n \times 1}^T$$

这里: $K_1^a = (1+\Delta K_x^a)^{-2}$; $K_2^a = (1+\Delta K_y^a)^{-2}$; $K_3^a = (1+\Delta K_z^a)^{-2}$; $K_4^a = \Delta\theta_{yx} (1+\Delta K_x^a)^{-1} (1+\Delta K_y^a)^{-2}$; $K_5^a = \Delta\theta_{zx} (1+\Delta K_x^a)^{-1} (1+\Delta K_z^a)^{-2}$; $K_6^a = \Delta\theta_{zy} (1+\Delta K_y^a)^{-1} (1+\Delta K_z^a)^{-2}$; $K_7^a = b_x^a (1+\Delta K_x^a)^{-2}$; $K_8^a = b_y^a (1+\Delta K_y^a)^{-2}$; $K_9^a = b_z^a (1+\Delta K_z^a)^{-2}$ 。

通过最小二乘法可得向量*K*^a的估计值为:

$$\hat{K}^a = (N_s^{aT} \cdot N_s^a)^{-1} N_s^{aT} G \quad (8)$$

进而从*K*₁^a、*K*₂^a、*K*₃^a、*K*₄^a、*K*₅^a、*K*₆^a、*K*₇^a、*K*₈^a、*K*₉^a这9个方程中,可求解出加速度计误差模型的9个参数为:

速度计输出的脉冲个数。

令 $K_i^a \tilde{N}_i^a = N_i^a (i=x,y,z)$, 根据公式(5)中可得加速度计的比力输入为:

$$\begin{bmatrix} f_x^b \\ f_y^b \\ f_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\Delta K_x^a & 0 & 0 \\ \Delta\theta_{yx} & 1+\Delta K_y^a & 0 \\ \Delta\theta_{zx} & \Delta\theta_{zy} & 1+\Delta K_z^a \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} N_x^a \\ N_y^a \\ N_z^a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_x^a \\ b_y^a \\ b_z^a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_x^a \\ n_y^a \\ n_z^a \end{bmatrix} \right) \quad (6)$$

比力输入以*g*为单位,根据模观测原理公式(1),对公式(6)取模后,忽略二阶小量可得:

$$1 = (f_x^b)^2 + (f_y^b)^2 + (f_z^b)^2 = (N_x^a)^2 \cdot (1+\Delta K_x^a)^{-2} + (N_y^a)^2 \cdot (1+\Delta K_y^a)^{-2} + (N_z^a)^2 \cdot (1+\Delta K_z^a)^{-2} - 2N_x^a N_y^a \cdot \Delta\theta_{yx} (1+\Delta K_x^a)^{-1} (1+\Delta K_y^a)^{-2} - 2N_x^a N_z^a \cdot \Delta\theta_{zx} (1+\Delta K_x^a)^{-1} (1+\Delta K_z^a)^{-2} - 2N_y^a N_z^a \cdot \Delta\theta_{zy} (1+\Delta K_y^a)^{-1} (1+\Delta K_z^a)^{-2} - 2N_x^a \cdot b_x^a (1+\Delta K_x^a)^{-2} - 2N_y^a \cdot b_y^a (1+\Delta K_y^a)^{-2} - 2N_z^a \cdot b_z^a (1+\Delta K_z^a)^{-2}$$

当加速度计在*n*个位置进行观测时,其相应的输出设为*N*_{*i*}^a(*j*), (*i=x,y,z, j=1, …, n*)将上式写成矩阵形式为:

$$G = N_s^a \cdot K^a \quad (7)$$

其中

$$\Delta K_x^a = (K_1^a)^{-1/2} - 1; \Delta K_y^a = (K_2^a)^{-1/2} - 1; \Delta K_z^a = (K_3^a)^{-1/2} - 1; \Delta\theta_{yx} = K_4^a \cdot (K_1^a)^{-1/2} \cdot (K_2^a)^{-1}; \Delta\theta_{zx} = K_5^a \cdot (K_1^a)^{-1/2} \cdot (K_3^a)^{-1}; \Delta\theta_{zy} = K_6^a \cdot (K_2^a)^{-1/2} \cdot (K_3^a)^{-1}; b_x^a = K_7^a \cdot (K_1^a)^{-1}; b_y^a = K_8^a \cdot (K_2^a)^{-1}; b_z^a = K_9^a \cdot (K_3^a)^{-1}。$$

1.2 陀螺参数标定

只考虑零阶和一阶误差参数时,陀螺的输出模型为:

$$\begin{bmatrix} K_x^g \tilde{N}_x^g \\ K_y^g \tilde{N}_y^g \\ K_z^g \tilde{N}_z^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\Delta K_x^g & 0 & 0 \\ \Delta\varphi_{yx} & 1+\Delta K_y^g & 0 \\ \Delta\varphi_{zx} & \Delta\varphi_{zy} & 1+\Delta K_z^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^d \\ \omega_y^d \\ \omega_z^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x^g \\ b_y^g \\ b_z^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x^g \\ n_y^g \\ n_z^g \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中： $\omega^d = [\omega_x^d \ \omega_y^d \ \omega_z^d]^T$ 为输入角速率矢量在陀螺参数坐标系 d 中的表示， K_i^g 、 ΔK_i^g 、 b_i^g 、 b_i^g ($i=x,y,z$) 分别为 i 轴陀螺的标度因子、标度因子误差、零偏、测量噪声； $\Delta\varphi_{ij}$ ($i,j=x,y,z$ 且 $i \neq j$) 为陀螺的安装误差角； $\tilde{N}^g = [\tilde{N}_x^g \ \tilde{N}_y^g \ \tilde{N}_z^g]^T$ 为单位时间内陀螺输出的脉冲数。

令 $K_i^g \tilde{N}_i^g$ ($i=x,y,z$)，根据公式(9)可得陀螺的角速率输入为：

$$\begin{bmatrix} \omega_x^d \\ \omega_y^d \\ \omega_z^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\Delta K_x^g & 0 & 0 \\ \Delta\varphi_{yx} & 1+\Delta K_y^g & 0 \\ \Delta\varphi_{zx} & \Delta\varphi_{zy} & 1+\Delta K_z^g \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_x^g \\ N_y^g \\ N_z^g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_x^g \\ b_y^g \\ b_z^g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_x^g \\ n_y^g \\ n_z^g \end{bmatrix} \quad (10)$$

根据模观测原理公式(2)，对公式(10)取模后，忽略二阶小量可得：

$$N_s^g = \begin{bmatrix} (N_x^g(1))^2 & (N_y^g(1))^2 & (N_z^g(1))^2 & -2N_x^g(1) \cdot N_y^g(1) & -2N_y^g(1) \cdot N_z^g(1) & -2N_x^g(1) \cdot N_z^g(1) & -2N_x^g(1) & -2N_y^g(1) & -2N_z^g(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (N_x^g(n))^2 & (N_y^g(n))^2 & (N_z^g(n))^2 & -2N_x^g(n) \cdot N_y^g(n) & -2N_y^g(n) \cdot N_z^g(n) & -2N_x^g(n) \cdot N_z^g(n) & -2N_x^g(n) & -2N_y^g(n) & -2N_z^g(n) \end{bmatrix}_{n \times 9}$$

$$M = [\omega_T^2 + \omega_e^2 + 2\omega_e \omega_T \sin L \cdots \omega_T^2 + \omega_e^2 + 2\omega_e \omega_T \sin L]_{n \times 1}^T$$

这里： $K_1^g = (1+\Delta K_x^g)^{-2}$ ； $K_2^g = (1+\Delta K_y^g)^{-2}$ ； $K_3^g = (1+\Delta K_z^g)^{-2}$ ； $K_4^g = \Delta\varphi_{yx} (1+\Delta K_x^g)^{-1} (1+\Delta K_y^g)^{-2}$ ； $K_5^g = \Delta\varphi_{zx} (1+\Delta K_x^g)^{-1} (1+\Delta K_z^g)^{-2}$ ； $K_6^g = \Delta\varphi_{zy} (1+\Delta K_y^g)^{-1} (1+\Delta K_z^g)^{-2}$ ； $K_7^g = b_x^g (1+\Delta K_x^g)^{-2}$ ； $K_8^g = b_y^g (1+\Delta K_y^g)^{-2}$ ； $K_9^g = b_z^g (1+\Delta K_z^g)^{-2}$ 。

利用最小二乘法，可得到向量的 K^g 估计值：

$$\hat{K}^g = (N_s^{gT} \cdot N_s^g)^{-1} N_s^{gT} M \quad (12)$$

同理从 K_1^g 、 K_2^g 、 K_3^g 、 K_4^g 、 K_5^g 、 K_6^g 、 K_7^g 、 K_8^g 、 K_9^g 这 9 个方程，可求解出陀螺的误差模型的 9 个参数为：

$$\begin{aligned} \Delta K_x^g &= (K_1^g)^{-1/2} - 1; \Delta K_y^g = (K_2^g)^{-1/2} - 1; \Delta K_z^g = (K_3^g)^{-1/2} - 1; \\ \Delta\varphi_{yx} &= K_4^g \cdot (K_1^g)^{-1/2} \cdot (K_2^g)^{-1}; \Delta\varphi_{zx} = K_5^g \cdot (K_1^g)^{-1/2} \cdot (K_3^g)^{-1}; \\ \Delta\varphi_{zy} &= K_6^g \cdot (K_2^g)^{-1/2} \cdot (K_3^g)^{-1}; b_x^g = K_7^g \cdot (K_1^g)^{-1}; b_y^g = K_8^g \cdot (K_2^g)^{-1}; b_z^g = K_9^g \cdot (K_3^g)^{-1}. \end{aligned}$$

根据公式(8)和(12)可标定出加速度计误差模型(5)和陀螺的误差模型(9)，但加速度计和陀螺的误差参数表示坐标系不统一，下文利用转台标定陀螺

$$\begin{aligned} (\omega_x^d)^2 (\omega_y^d)^2 + (\omega_z^d)^2 &= \omega_T^2 + \omega_e^2 + 2\omega_e \omega_T \sin L = \\ (N_x^g)^2 \cdot (1+\Delta K_x^g)^{-2} + (N_y^g)^2 \cdot (1+\Delta K_y^g)^{-2} + (N_z^g)^2 \cdot (1+\Delta K_z^g)^{-2} - \\ &2N_x^g N_y^g \cdot \Delta\varphi_{yx} (1+\Delta K_x^g)^{-1} (1+\Delta K_y^g)^{-2} - 2N_x^g N_z^g \cdot \Delta\varphi_{zx} \\ &(1+\Delta K_x^g)^{-1} (1+\Delta K_z^g)^{-2} - 2N_y^g N_z^g \cdot \Delta\varphi_{yz} (1+\Delta K_y^g)^{-1} \\ &(1+\Delta K_z^g)^{-2} - 2N_x^g \cdot b_x^g (1+\Delta K_x^g)^{-2} - 2N_y^g \cdot b_y^g (1+\Delta K_y^g)^{-2} - \\ &2N_z^g \cdot b_z^g (1+\Delta K_z^g)^{-2} \end{aligned}$$

当陀螺在 n 个位置进行观测时，其相应的输出设为 $N_i^g(j)$ ($i=x,y,z, j=1, \dots, n$)。将上式写成矩阵形式有：

$$M = N^g \cdot K^g \quad (11)$$

其中

$$K^g = [K_1^g \ K_2^g \ K_3^g \ K_4^g \ K_5^g \ K_6^g \ K_7^g \ K_8^g \ K_9^g]_{9 \times 1}^T$$

参数坐标系与载体坐标系之间的姿态矩阵 C_d^b 。

2 参数坐标系的统一

为了将陀螺参数坐标系转换到载体坐标系下，利用 SIMU 框架坐标系作为桥梁，来实现加表和陀螺参数标定的统一。考虑安装误差的存在，设 SIMU 框架坐标系 $o_k x_k y_k z_k$ 与载体坐标系 $o_b x_b y_b z_b$ 之间的姿态矩阵为：

$$C_b^k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\theta_{z4} & \Delta\theta_{y4} \\ -\Delta\theta_{z4} & 1 & \Delta\theta_{x4} \\ \Delta\theta_{y4} & -\Delta\theta_{x4} & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

当转台外环轴轴线铅垂度误差为 $\Delta\theta_{x0}$ 、 $\Delta\theta_{y0}$ ，转台内环轴为零位、外环轴、中环轴角位置分别为 γ 、 α 时，SIMU 框架坐标系和地理坐标系之间的姿态矩阵为：

$$C_k^n = \text{Rot}(x, \Delta\theta_{x0}) \text{Rot}(y, \Delta\theta_{y0}) \text{Rot}(z, \gamma) \text{Rot}(x, \alpha) \quad (14)$$

根据姿态矩阵的传递关系，地理坐标系与 SIMU 框架坐标系之间的姿态矩阵为：

$$C_n^b = (C_k^n \cdot C_b^k)^T \quad (15)$$

于是加速度计的比力输入为：

$$\mathbf{f}^b = \mathbf{C}_k^b \cdot \mathbf{C}_n^k \cdot [0 \ 0 \ 1]^T \quad (16)$$

将公式(13)、(14)、(16)代入加速度计模型(5),忽略二阶小量后有:

$$\begin{bmatrix} N_x^a \\ N_y^a \\ N_z^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta\theta_{y0} \cos\gamma + \Delta\theta_{x0} \sin\gamma + \Delta\theta_{z4} \sin\alpha - \Delta\theta_{y4} \cos\alpha + b_x^a \\ (1 + \Delta K_y^a) \sin\alpha + \Delta\theta_{y0} \cos\alpha \sin\gamma + \Delta\theta_{x0} \cos\alpha \cos\gamma + \\ \Delta\theta_{x4} \cos\alpha + b_y^a \\ \Delta\theta_{zy} \sin\alpha + (1 + \Delta K_z^a) \cos\alpha - \Delta\theta_{y0} \sin\alpha \sin\gamma - \\ \Delta\theta_{x0} \sin\alpha \cos\gamma - \Delta\theta_{x4} \sin\alpha + b_z^a \end{bmatrix} \quad (17)$$

由于加速度计模型参数 ΔK_i^a 、 b_i^a ($i=x,y,z$ 已经在 1.1 节中进行标定),外环轴铅垂度误差 $\Delta\theta_{x0}$ 、 $\Delta\theta_{y0}$ 满足 SIMU 的标定精度要求,则不必对其标定,从公式(17)中可知,仅转台中环轴转动角 α 至少两个位置,即可从 x,y 加速度计的输出中标定出安装误差角 $\Delta\theta_{x4}$ 、 $\Delta\theta_{y4}$ 、 $\Delta\theta_{z4}$ 。当考虑外环轴铅垂度误差时,根据公式(17)可知,转动转台的外环轴角 γ 至少两个位置、中环轴转动角 α 至少两个位置、可同时标定出外环轴铅垂度误差 $\Delta\theta_{x0}$ 、 $\Delta\theta_{y0}$ 和安装误差角 $\Delta\theta_{x4}$ 、 $\Delta\theta_{y4}$ 、 $\Delta\theta_{z4}$,从公式(13)可得姿态矩阵 \mathbf{C}_b^k 。

同理,为了将陀螺输出模型转换到载体坐标系下,设 SIMU 框架坐标系 $o_k x_k y_k z_k$ 与陀螺参数坐标系 $o_d x_d y_d z_d$ 之间的姿态矩阵为:

$$\mathbf{C}_b^k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\lambda_{z4} & -\Delta\lambda_{y4} \\ -\Delta\lambda_{z4} & 1 & \Delta\lambda_{x4} \\ \Delta\lambda_{y4} & -\Delta\lambda_{x4} & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

当转台外环以角速率 ω_T 转动,由于地球自转角速率量级很小,可忽略外环轴轴线铅垂度误差 $\Delta\theta_{x0}$ 、 $\Delta\theta_{y0}$ 的影响,转台内环轴为零位、中环轴角位置为 α 时,载体坐标系和地理坐标系之间的姿态矩阵为:

$$\mathbf{C}_k^n = \text{Rot}(x, \alpha) \quad (19)$$

此时陀螺的角速率输入为:

$$\boldsymbol{\omega}^d = \mathbf{C}_k^d \cdot \mathbf{C}_n^k \cdot [0 \ \omega_e \cos L \ \omega_e \sin L + \omega_T]^T \quad (20)$$

将公式(20)代入陀螺模型(9)后,忽略二阶小量有:

$$\begin{bmatrix} N_x^g \\ N_y^g \\ N_z^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\lambda_{z4} \omega_T \sin\alpha - \Delta\lambda_{y4} \omega_T \cos\alpha + b_x^g \\ (1 + \Delta K_y^g) \omega_T \sin\alpha + \omega_e \cos L \cos\alpha + \omega_e \sin L \sin\alpha \\ + \Delta\lambda_{x4} \omega_T \cos\alpha + b_y^g \\ \Delta\varphi_{zy} \omega_T \sin\alpha + (1 + \Delta K_z^g) \omega_T \cos\alpha - \Delta\lambda_{x4} \omega_T \sin\alpha - \\ \omega_e \cos L \sin\alpha + \omega_e \sin L \cos\alpha + \omega_T \cos\alpha + b_z^g \end{bmatrix} \quad (21)$$

由于陀螺模型参数 ΔK_i^g 、 b_i^g ($i=x,y,z$) 已经在上一节中进行标定,从公式(21)中可知,当转台外环以角速率 ω_T 转动,仅中环轴角 α 转动至少两个角位置,即可从 x,y 陀螺的输出中标定出安装误差角 $\Delta\lambda_{x4}$ 、 $\Delta\lambda_{y4}$ 、 $\Delta\lambda_{z4}$,由公式(18)可得姿态矩阵 \mathbf{C}_d^k 。

因此根据式(13)和(18)得到的姿态矩阵 \mathbf{C}_b^k 与 \mathbf{C}_d^k ,可求得陀螺参数坐标系与载体坐标系之间的姿态矩阵为:

$$\mathbf{C}_d^b = \mathbf{C}_b^b \cdot \mathbf{C}_d^k = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\lambda_{z4} + \Delta\theta_{z4} & \Delta\lambda_{y4} - \Delta\theta_{y4} \\ \Delta\lambda_{z4} - \Delta\theta_{z4} & 1 & -\Delta\lambda_{x4} + \Delta\theta_{x4} \\ -\Delta\lambda_{y4} + \Delta\theta_{y4} & \Delta\lambda_{x4} - \Delta\theta_{x4} & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

利用已经标定出的姿态矩阵 \mathbf{C}_d^b 和陀螺参数坐标系下的陀螺输出模型(9),最终可得载体坐标系下的陀螺输出模型为:

$$\begin{bmatrix} N_x^g \\ N_y^g \\ N_z^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \Delta K_x^g & \Delta\lambda_{z4} - \Delta\theta_{z4} & -\Delta\lambda_{y4} + \Delta\theta_{y4} \\ \Delta\varphi_{yx} - \Delta\lambda_{z4} + \Delta\theta_{z4} & 1 + \Delta K_y^g & \Delta\lambda_{x4} - \Delta\theta_{x4} \\ \Delta\varphi_{zx} + \Delta\lambda_{y4} - \Delta\theta_{y4} & \Delta\varphi_{zy} - \Delta\lambda_{x4} + \Delta\theta_{x4} & 1 + \Delta K_z^g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x^g \\ b_y^g \\ b_z^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x^g \\ n_y^g \\ n_z^g \end{bmatrix} \quad (23)$$

为方便将上式写成矩阵形式为:

$$\mathbf{N}^g = \mathbf{M}^g \boldsymbol{\omega}^b + \mathbf{B}^g \quad (24)$$

3 标定方案设计

对于捷联惯导的测试,传统的标定方案设计只是为单纯的辨识模型系数,设计简便快速的试验计划,并没有考虑到信息矩阵对模型系数精度的影响。

在捷联惯性组合的测试中最优试验计划的设计理论已经提出了多种 D-最优、准 D-最优意义下的均匀旋转计划和组合旋转计划等。

该节根据最优试验计划中准 D-最优设计的标定方案,可最大限度的提高模型系数的标定精度。当转台外环以匀角速率 ω_T 转动时,利用模观测原理对加速度计和陀螺进行标定时,总具有约束条件 $(f_x^b)^2 + (f_y^b)^2 + (f_z^b)^2 = g^2$ 、 $(\omega_x^d)^2 + (\omega_y^d)^2 + (\omega_z^d)^2 = (\omega_T^n)^2 + (\omega_e^n)^2 + 2\omega_T^n \omega_e^n \cdot \sin L$,即加速度计和陀螺的输入分量分布在球面上。如果将输入分量在球面上均匀分布,即加速度计和陀螺的标定在球面上均匀布置测试点,即可满足准 D-最优试验计划^[21],能够使得信息矩阵降秩数最少,信息量最大。根据立体几何可知,球面上均匀的测试

点,即为球内接正多面体的顶点,三维空间中仅有五种球内接正多面体:[4]₄、[6]₈、[8]₆、[12]₂₀、[20]₁₂,这里 $[I]_J$ 代表正 I 面体共有 J 个顶点。从公式(7)和(11)可知,至少 9 个测试位置才可完成加速度计和陀螺的参数标定,其中 [20]₁₂ 是包含所需测试位置的最佳方案。由立体几何理论可得正二十面体各顶点的坐标为 $\{(\pm m, 0, \pm n), (0, \pm n, \pm m), (\pm n, \pm m, 0)\}$,其中 $m = \sqrt{50-10\sqrt{5}}/10, n = \sqrt{50+10\sqrt{5}}/10$ 。容易证明中、内环轴分别旋转如表 1 所示的角度,即可使得测试点均匀分布在正二十面体上。

对加速度计模型进行标定时,位置编排如表 1 所示;标定陀螺模型时,转台外环轴以角速率 ω_T 转动,转台中、内环轴角度位置 α, β 的编排如表 1 所示。

表 1 参数标定位置编排

Tab.1 Position arrangement of parameter calibration

No.	1	2	3	4	5	6
$\alpha/(^\circ)$	0	0	0	0	58.282 5	121.717 5
$\beta/(^\circ)$	-31.717 5	211.717 5	148.282	31.717	0	0
$\gamma/(^\circ)$	30	60	90	120	150	180
	7	8	9	10	11	12
$\alpha/(^\circ)$	-58.282 5	238.282 5	148.282 5	211.717 5	31.717 5	-31.717 5
$\beta/(^\circ)$	0	0	90	90	90	90
$\gamma/(^\circ)$	210	240	270	300	330	0

为将陀螺的误差参数转换到载体坐标系下,先标定 SIMU 框架坐标系 $o_kx_ky_kz_k$ 与载体坐标系 $o_bx_by_bz_b$ 之间的姿态矩阵,位置编排如下。

表 2 姿态矩阵标定的位置编排

Tab.2 Position arrangement of calibrating attitude matrix

No.	1	2	3	4
$\alpha/(^\circ)$	0	90	0	90
$\gamma/(^\circ)$	0	0	180	180

设表 2 的位置编排中各位置的加速度计输出分别为 $N^a(1), N^a(2), N^a(3), N^a(4)$,故利用公式(17)容易求得:

$$\Delta\theta_{x4} = \frac{N_y^a(1) + N_y^a(3)}{2} - b_y^a$$

$$\Delta\theta_{y4} = \frac{-N_x^a(1) - N_x^a(3)}{2} + b_x^a \quad (25)$$

$$\Delta\theta_{z4} = \frac{N_x^a(2) + N_x^a(4)}{2} - b_x^a$$

$$\Delta\theta_{x0} = \frac{N_y^a(1) - N_y^a(3) + N_z^a(4) - N_z^a(2)}{4}$$

$$\Delta\theta_{y0} = \frac{N_x^a(3) - N_x^a(1) + N_x^a(4) - N_x^a(2)}{4} \quad (26)$$

根据 SIMU 的标定精度要求,当无须对外环轴铅垂度 $\Delta\theta_{x0}, \Delta\theta_{y0}$ 进行标定时,则利用表 2 位置 1 和位置 2,根据公式(17)即可标定出姿态矩阵的安装误差角 $\Delta\theta_{x4}, \Delta\theta_{y4}, \Delta\theta_{z4}$,此处不再赘述。

为标定载体坐标系 $o_b x_b y_b z_b$ 与陀螺参数坐标系 $o_a x_a y_a z_a$ 之间的姿态矩阵 C_d^b , 只需将转台中环轴角位置 α 分别处于 0° 和 90° , 外环轴以速率 ω_T 转动一周, 采样周期为 T 。设陀螺的输出分别为 $N^g(1)$ 、 $N^g(2)$, 根据公式(21)容易求得:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{x4} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^T N_y^g(1) - b_y^g T - \omega_z \cos L \cdot T \\ \Delta\lambda_{y4} &= \frac{-1}{2\pi} \sum_{i=1}^T N_x^g(1) + b_x^g T \\ \Delta\lambda_{z4} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^T N_x^g(1) - b_x^g T \end{aligned} \quad (27)$$

值得注意的是, 进行参数坐标系统一时, 对姿态矩阵 C_p^b 和 C_d^b , 采用的是分立标定, 从公式(25)和(27)可以看出标定方案表 2 中引入的转台角位置误差将会引起姿态矩阵的标定误差, 进而引起陀螺模型(24)中安装矩阵 M^g 的标定误差。但由于表 2 设计位置编排简单, 容易控制相应测试位置的角位置误差在角分级以下。

4 仿真分析

仿真条件设置如下: 当地纬度为北纬 45° , 加速

度计标度因子分别为 $K_x^a=10\ 800\ \text{P/g}$ 、 $K_y^a=10\ 400\ \text{P/g}$ 、 $K_z^a=10\ 600\ \text{P/g}$, 陀螺的标度因子为 $K_i^g=1.186\ 6\ \text{P}/(^{\circ})$ ($i=x,y,z$), 外环轴转动角速率为 $10^\circ/\text{s}$, SIMU 中陀螺测量噪声为 $0.01(^{\circ})/\text{h}$, 加速度计测量噪声为 10^{-5}g , 载体坐标系与 SIMU 框架坐标系之间的安装误差角分别为 $\Delta\theta_{x4}=12'$ 、 $\Delta\theta_{y4}=2'$ 、 $\Delta\theta_{z4}=-5'$, 转台的外环轴铅垂度、中外垂直度、中内垂直度、中环轴与内环轴零位误差均为 $5''$ 且随机引入 $[-1', 1']$ 角位置误差。

为方便观察, 利用传统多位置标定方法与模观测方法进行对比。传统多位置标定方法直接利用加速度计模型(5)和陀螺模型(9)在各角位置的输出矢量为观测量, 采用最小二乘法解算线性方程组来得到模型的各项误差系数。模观测法具体仿真流程如下: 首先利用参数标定方案表 1 得到 IMU 的输出, 根据公式(7)和(11)得到加表的模型参数和陀螺的标度因子与零偏; 其次利用姿态矩阵标定方案表 2, 根据公式(25)~(27)得到陀螺的安装误差矩阵。

传统多位置标定方法与模观测方法标定仿真结果如表 3 所示, 为了避免四舍五入造成的算法性能无法区分, 标定结果比真值多取了两位。

表 3 SIMU 标定仿真结果

Tab.3 SIMU calibration simulation results

Gyro	Real values	Norm observation	Previous method	Acc	Real values	Norm observation	Previous method
ΔK_x^g	0.002	0.002 00	0.001 95	ΔK_x^a	0.002	0.001 94	0.001 92
ΔK_y^g	-0.0015	-0.001 494	-0.001 463	ΔK_y^a	0.008	0.008 02	0.008 05
ΔK_z^g	-0.0015	-0.001 492	-0.001 484	ΔK_z^a	0.006	0.006 01	0.006 00
$b_x^g/(^{\circ}) \cdot \text{h}^{-1}$	-0.34	-0.336 3	-0.291 2	b_x^a/g	0.000 8	0.000 795	0.000 797
$b_y^g/(^{\circ}) \cdot \text{h}^{-1}$	0.17	0.166 4	0.252 7	b_y^a/g	-0.001	-0.001 01	-0.000 93
$b_z^g/(^{\circ}) \cdot \text{h}^{-1}$	-0.02	-0.050 9	0.077 0	b_z^a/g	-0.003 2	-0.003 182	-0.003 275
m_{12}^g/rad	0.000 1	0.000 094	-0.001 320	$\Delta\theta_{yx}/\text{rad}$	0.000 1	0.000 099	0.001 538
m_{13}^g/rad	0.0001	0.000 082	-0.000 414	$\Delta\theta_{zx}/\text{rad}$	0.000 1	0.000 062	0.000 670
m_{21}^g/rad	0.000 2	0.000 211	0.001 626	$\Delta\theta_{zy}/\text{rad}$	0.000 1	0.000 161	0.003 689
m_{23}^g/rad	0.000 1	0.000 003	-0.003 502	-	-	-	-
m_{31}^g/rad	-0.000 6	-0.000 585	-0.000 017	-	-	-	-
m_{32}^g/rad	0.000 5	0.000 597	0.004 044	-	-	-	-

从表 3 中可以看出,模观测法较传统多位置标定法得到的标定结果更接近真值,其中模观测法标定的加表和陀螺的安装矩阵及陀螺零偏明显优于传统多位置标定法。这说明模观测法相对于传统多位置标定法更有效的抑制了转台误差对 SIMU 模型参数标定结果的影响。值得注意的是传统解法中将载体坐标系默认为与 SIMU 框架坐标系重合,即忽略了载体坐标系与转台零位时各轴之间的安装误差角;而文中将载体坐标系与转台各轴之间的安装误差角加入到模型中,这使得 IMU 模型中的安装矩阵的标定误差大大减小。

当转台角位置误差为 1" 时,模观测法得到的 SIMU 模型参数标定结果仅在加表和陀螺的安装矩阵上优于传统方法、其他参数的标定结果相差不大,但随着转台角位置误差的增大,模观测法相比传统

多位置标定法的优势就越明显。下面以 SIMU 模型参数中的 ΔK_x^a 和 b_y^g 的标定误差为例,比较两种方法标定结果的优劣性。

由于篇幅有限,其他误差参数的标定误差对比不在此赘述。由表 4 可知随着转台角位置误差的增大,传统解法得到的模型参数标定误差越来越大,而当角位置误差小于 1° 时,模观测法得到的模型参数标定误差却没有明显变化。究其原因,是由于传统解法辨识模型参数用到的信息矩阵依赖于转台提供的角位置所致;而模观测法采用的信息矩阵由加速度计和陀螺的输出函数构成。这意味着模观测法无须转台提供精确的姿态信息,只需要根据加速度计和陀螺的输出,利用公式(8)和(12)便可辨识出 IMU 的模型参数,因此模观测法可以有效的避免转台误差对模型参数的标定产生影响。

表 4 模型参数 ΔK_x^a 和 b_y^g 的标定误差对比

Tab.4 Calibration errors comparison between ΔK_x^a and b_y^g

Parameter	Calibration method	Angular position errors 1"	Angular position errors 1'	Angular position errors 10'	Angular position errors 1°	Angular position errors 10°
ΔK_x^a	Norm observation	5.72×10^{-5}	5.72×10^{-5}	5.72×10^{-5}	5.72×10^{-5}	5.53×10^{-5}
	Previous method	2.86×10^{-5}	8.27×10^{-5}	5.736×10^{-4}	$3.429 3 \times 10^{-3}$	0.047 857 1
$b_y^g / (^\circ) \cdot h^{-1}$	Norm observation	$3.594 8 \times 10^{-3}$	$3.580 5 \times 10^{-3}$	$3.449 7 \times 10^{-3}$	$3.727 2 \times 10^{-3}$	$-4.239 3 \times 10^{-3}$
	Previous method	-0.039 223 3	-0.082 700 4	-0.093 248 0	-3.597 427 4	-1.802 309 3

随着角位置误差增大至 10° 时,可观察到模观测法得到的陀螺零偏 b_y^g 标定误差也略有增大。这是由于角位置误差的增大,使得参数标定方案表 1 中的试验布点与正二十面体的顶点偏离增大,即在球面上布点不均匀导致模观测法得到的模型参数标定误差增大,进一步验证了正二十面体-12 点的位置和速率试验计划表 1 对于准确标定 SIMU 模型参数具有一定的优势。

5 结 论

文中研究了激光陀螺捷联惯导系统的模观测标定方法,克服了转台角位置误差、轴线垂直度、零位误差、安装误差角对 SIMU 标定结果的影响,降低了 SIMU 标定对转台精度的要求。以 SIMU 框架坐标系为桥梁,用四个特殊位置将陀螺的模型参数转换

到载体坐标系下,解决了模观测法中存在的加速度计和陀螺参数表示不统一的问题。结合模观测法中矢量模不变的特点,采取球面上均匀布点的准 D-最优试验计划,设计了正二十面体-12 点的位置和速率试验计划,通过仿真验证该计划对加速度计和陀螺模型参数的标定具有一定的优势。该方法为 SIMU 在三轴转台上的标定工作提供了理论依据和参考价值,可进一步提高惯性组合的标定精度。

参考文献:

[1] Zhong Mingfei, Tang Jianxun, Jiang Qiyuan, et al. Coning algorithm of laser gyro strapdown inertial navigation system in vibrating condition [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2014, 43(8): 2626-2630. (in Chinese)
钟明飞, 汤建勋, 江奇渊, 等. 振动条件下激光陀螺捷联惯导系统的圆锥算法研究[J]. 红外与激光工程, 2014, 43(8):

- 2626–2630.
- [2] Xu Y, Wang Y, Su Y, et al. Research on the calibration method of micro inertial measurement unit for engineering application[J]. *Journal of Sensors*, 2016(1): 9108197.
- [3] Bu Fanwei. Strapdown inertial measurement unit of test and calibration [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2011. (in Chinese)
卜凡伟. 捷联惯性组合的测试与校准[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011: 15–24.
- [4] Yu Hailong, Lv Xinming, Tang Jianxun, et al. Establishment and analysis of high-order error model of laser gyro SINS [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42 (9): 2375–2379. (in Chinese)
于海龙, 吕信明, 汤建勋, 等. 激光捷联惯导系统高阶误差模型的建立与分析 [J]. 红外与激光工程, 2013, 42(9): 2375–2379.
- [5] Cai Q, Yang G, Song N, et al. Systematic calibration for ultra-high accuracy inertial measurement units [J]. *Sensors*, 2016, 16(6): 940–956.
- [6] Dong Chunmei, Ren Shunqing, Chen Xijun. IMU calibration method based on analysis for the errors of three-axis turntable[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2016, 38 (4): 895–901. (in Chinese)
董春梅, 任顺清, 陈希军. 基于三轴转台误差分析的 IMU 标定方法[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(4): 895–901.
- [7] Pan J Y, Zhang C X, Cai Q Z. An accurate calibration method for accelerometer nonlinear scale factor on a low-cost three-axis turntable [J]. *Measurement Science and Technology*, 2014, 25(2): 2–7.
- [8] Zhang Q, Wang L, Liu Z, et al. An accurate calibration method based on velocity in a rotational inertial navigation system[J]. *Sensors*, 2015, 15(8): 18443–18458.
- [9] Du Hailong, Zhang Ronghui, Liu Ping, et al. Realization of attitude algorithm module in strapdown inertial guidance system[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2008, 16(10): 1956–1962. (in Chinese)
杜海龙, 张荣辉, 刘平, 等. 捷联惯导系统姿态解算模块的实现[J]. 光学精密工程, 2008, 16(10): 1956–1962.
- [10] Xu Y, Zhu X, Su Y. A novel network calibration method for inertial measurement units [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part G Journal of Aerospace Engineering*, 2014, 229(7): 1336–1348.
- [11] Zheng Z, Han S, Zheng K. An eight-position self-calibration method for a dual-axis rotational inertial navigation system [J]. *Sensors & Actuators A Physical*, 2015, 232: 39–48.
- [12] Yang Guanjinzi, Li Jianchen, Huang Hai, et al. Non-turntable calibration method for three-accelerometer based on genetic algorithm [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2017, 25(1): 119–123. (in Chinese)
杨管金子, 李建辰, 黄海, 等. 基于遗传算法的加速度计免转台标定方法[J]. 中国惯性技术学报, 2017, 25(1): 119–123.
- [13] Rohac J, Sipos M, Simanek J. Calibration of low-cost triaxial inertial sensors [J]. *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, 2015, 18(6): 32–38.
- [14] Wang B, Ren Q, Deng Z, et al. A self-calibration method for nonorthogonal angles between gimbals of rotational inertial navigation system [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, 62(4): 2353–2362.
- [15] Lötters J C, Schipper J, Veltink P H, et al. Procedure for in-use calibration of triaxial accelerometers in medical applications[J]. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 1998, 68(1–3): 221–228.
- [16] Shin E H. Accuracy improvement of low cost ins/gps for land applications [D]. Calgary: University of Calgary, 2001.
- [17] Dai Shaowu, Wang Kehong, Dai Hongde. A new calibration method for MIMU on norm Observation [J]. *Automation Instrumentation*, 2014(11): 102–106. (in Chinese)
戴邵武, 王克红, 戴洪德. 一种基于模观测的 MIMU 标定新方法[J]. 自动化与仪器仪表, 2014(11): 102–106.
- [18] Syed Z F, Aggarwal P, Goodall C, et al. A new multi-position calibration method for MEMS inertial navigation systems [J]. *Measurement Science and Technology*, 2007, 18(7): 1897–1907.
- [19] Zhang Hongliang, Wu Yuanxin, Lian Junxiang, et al. Improved calibration scheme for high precision IMU's based on turntable error analysis [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2010, 18(1): 129–134. (in Chinese)
张红良, 武元新, 练军想, 等. 基于转台误差分析的高精度惯测组合标定编排改进 [J]. 中国惯性技术学报, 2010, 18(1): 129–134.
- [20] Zhang H, Wu Y, Wu W, et al. Improved multi-position calibration for inertial measurement units [J]. *Measurement Science & Technology*, 2010, 21(1): 015107.
- [21] Wang Weiyang. Study on identification theory of inertial sensor and system error model and its application [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 1997. (in Chinese)
王卫阳. 惯性仪表和系统误差模型辨识理论及应用研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 1997.