

基于粒子群优化的近似散射相函数拟合方法

陈 鹏^{1*}, 赵继广², 杜小平³, 宋一铄²

- (1. 航天工程大学 研究生院, 北京 101416;
2. 航天工程大学 电子与光学工程系, 北京 101416;
3. 航天工程大学 航天指挥学院, 北京 101416)

摘 要: 散射相函数是研究气溶胶中光传输特性的一个重要参量。对比了大气辐射传输中的蒙特卡罗仿真常用的 4 种近似散射相函数, 针对二项 Henyey-Greenstein(TTHG)相函数的参数不易确定的问题, 提出了一种基于粒子群优化的 TTHG 散射相函数, 该函数可以很好地拟合 Mie 散射相函数, 尤其是在大于 90° 的后向散射方向效果更加明显。相比于 HG、HG*、RHG 等相函数, 文中提出的相函数可以更好地逼近实际散射情况, 得到更精确的蒙特卡罗仿真结果。

关键词: 蒙特卡罗; 散射相函数; 后向散射; 粒子群优化

中图分类号: TN247 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201948.1203005

Approximate scattering phase function fitting method based on particle swarm optimization

Chen Peng^{1*}, Zhao Jiguang², Du Xiaoping³, Song Yishuo²

- (1. Graduate School, Space Engineering University, Beijing 101416, China;
2. Department of Electronics and Optical Engineering, Space Engineering University, Beijing 101416, China;
3. Aerospace Command College, Space Engineering University, Beijing 101416, China)

Abstract: The scattering phase function is an important parameter for studying the optical transmission characteristics in aerosols. Four approximate scattering phase functions commonly used in Monte Carlo simulations in atmospheric radiation propagation were compared. Aiming at the problem that the parameters of the Two-Term Henyey-Greenstein (TTHG) phase function were difficult to determine, a TTHG scattering phase function based on particle swarm optimization was proposed. This function can well fit the Mie scattering phase function, especially at backscatter angles greater than 90°. Compared with the phase functions such as HG, HG* and RHG, the phase function proposed in this paper can better approximate the actual scattering and obtain more accurate Monte Carlo simulation results.

Key words: Monte Carlo; scattering phase function; backscattering; particle swarm optimization

收稿日期: 2019-08-11; 修订日期: 2019-09-21

基金项目: 国家自然科学基金(61805284)

作者简介: 陈鹏(1990-), 男, 博士生, 主要从事激光近距探测方面的研究。Email: chenpeng_7777@163.com

导师简介: 赵继广(1967-), 男, 教授, 博士, 主要从事目标探测识别理论与技术方面的研究。

0 引言

激光雷达在军用、民用领域具有不可替代的作用,近年来一直是国内外研究的热点。激光雷达在大气中的辐射传输问题,也成为了领域内的关键问题。在早期研究中,将大气介质看作单次散射模型,可以较容易地计算出气溶胶的各种光学特性。但是当气溶胶浓度较高,或者激光传输距离很远时,必须考虑大气的多重散射作用^[1]。

目前,研究气溶胶多重散射的主要分析方法分为三种:解析方法^[2]、实验方法^[3]和蒙特卡罗方法^[4-6]。其中解析方法需要设定严格的初始条件和边界条件才能求得解析结果,其计算量庞大,而且对设置条件的要求较高。实验方法是建立实验室条件下的气溶胶环境,在此基础上进行光传输实验,来模拟真实云雾条件下激光传输效果。因为实验条件有限,这种方法的分析范围受到很大限制。蒙特卡罗方法不需要引入约束条件、边界条件或认为假设,仿真的重复性好,能够定性分析探测系统参数及环境变化对结果影响的趋势性规律。经过国内外学者的证实,该方法得出的规律与真实情况吻合,能在一定程度上预测实际结果。因此,文中用蒙特卡罗方法模拟激光与气溶胶相互作用,分析不同散射系数对激光传输的影响。

蒙特卡罗仿真过程中一个很重要的步骤是确定光子发生散射后的运动方向,根据蒙特卡罗仿真原理,需要根据粒子相位函数对光子散射角进行随机抽样。但是,Mie 氏散射粒子的相函数公式十分复杂,难以进行抽样^[7]。在蒙特卡罗仿真中为了实现更方便、快捷的散射角度抽样,需要对散射相函数进行近似^[8]。

文中对比了蒙特卡罗仿真中常用的 4 种近似相函数,分析其优缺点,针对二项 Henyey-Greenstein (Two-Term Henyey-Greenstein, TTHG) 相函数参数不易确定的问题,提出了基于粒子群优化的 TTHG 散射相函数,并通过仿真验证该方法的优点。该函数可以很好地拟合 Mie 散射相函数,尤其是在大于 90° 的后向散射方向,效果更加明显。这种相函数可以更好地逼近实际散射情况,得到更精确的蒙特卡罗仿真结果。该研究对气溶胶建模时的参数设置具有一定参考价值。

1 蒙特卡罗仿真中常用的近似相函数

1.1 常用的近似相函数

(1) Henyey-Greenstein(HG)相函数

蒙特卡罗仿真过程中一个很重要的步骤是确定光子发生散射后的运动方向,根据蒙特卡罗仿真原理,需要根据粒子相位函数对光子散射角进行随机抽样。由于 Mie 氏散射粒子的相函数公式十分复杂,难以进行抽样。作为替代方案,Henyey 和 Greenstein 提出了一个经验公式,称为 HG 函数,如公式(1)所示。

$$P_{HG}(\theta) = \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g\cos\theta)^{3/2}} \quad (1)$$

经过抽样可得散射后的方位角 θ_m 为:

$$\theta_m = \begin{cases} \arccos\left[\frac{1}{2g}\left[1+g^2-\left(\frac{1-g^2}{1+g^2-2g\zeta_\theta}\right)^2\right]\right] & g \neq 0 \\ \arccos(2g\zeta_\theta-1) & g=0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: ζ_θ 为[0, 1]内的随机数; g 为不对称因子。由于 HG 相函数公式简单,很容易求解出逆函数,十分适合蒙特卡罗仿真中方位角的抽样,因此,得到了广泛的应用。但是该函数存在局限性,它虽然可以很好描述前向散射,但不能正确计算后向散射。

(2) HG* 相函数

为了更好地描述后向散射性能,Cornette 和 Shanks 基于 Ragleigh 相函数和 HG 相函数,提出了一种新的近似相函数——HG* 相函数^[2]。

$$P_{HG^*}(\theta, g_*) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(1-g_*^2)(1-\cos^2\theta)}{(1+g_*^2)(1+g_*^2-2g_*\cos\theta)^{3/2}} \quad (3)$$

为了更好地模拟粒子的散射特性,公式(3)中的 g_* 不再用散射角余弦的一阶矩 $\langle \cos\theta \rangle$ 来定义,而是用 $\langle \cos\theta \rangle$ 的多项式来逼近,其表达式为:

$$g_* = \frac{5}{9} \langle \cos\theta \rangle - \left(\frac{4}{3} - \frac{25}{81} \langle \cos\theta \rangle^2\right) x^{-1/3} + x^{1/3} \quad (4)$$

其中, x 由公式(5)确定。

$$x = \frac{5}{9} \langle \cos\theta \rangle + \frac{125}{729} \langle \cos\theta \rangle^3 + \left(\frac{64}{27} - \frac{325}{243} \langle \cos\theta \rangle^2 + \frac{1}{2} \frac{250}{187} \langle \cos\theta \rangle^4\right)^{1/2} \quad (5)$$

HG* 相函数相对 HG 函数要复杂一些, 但能够更好地近似粒子的散射特性, 且不需要像 TTHG 一样确定多个参数。当 $\langle \cos\theta \rangle \rightarrow 0$ 时, HG* 退化为 Rayleigh 散射相函数, 当 $\langle \cos\theta \rangle \rightarrow 1$ 时, HG* 函数趋近于 HG 函数, 因此, HG* 函数可以在更宽的波段范围内描述气溶胶粒子的散射特性。

(3) RHG 相函数

对于 HG 相函数的修正版本 HG* 相函数来说, 更多的是在修正前向散射的角度, 对后向散射的修正很有限。当粒子的后向散射能量较强时, 计算误差也比较明显。为了更好地描述粒子的散射特性, 程晨^[9-10]结合 HG 相函数和 Rayleigh 散射相函数的表达式, 提出了一种改进散射(RHG)相函数。

$$P_{RHG}(\theta) = \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g\cos\theta)^{3/2}} + \frac{3(1-g)(1-\cos^2\theta)+(g-1)}{4} \quad (6)$$

该近似函数可以增大后向散射能量, 解析式也不复杂。在散射角度大于 90° 的范围内, 可以增大后向散射的能量。当 $g \rightarrow 0$ 时, RHG 相函数逼近 Rayleigh 函数, 而在 $g \rightarrow 1$ 时, 该函数逼近经典的 HG 函数。

(4) TTHG 相函数

为了准确描述后向散射作用, Kattawar 提出了一种 TTHG 相函数^[7, 11-12]。

$$P_{TTHG}(\theta) = \alpha \cdot \frac{(1-g_\alpha^2)}{(1+g_\alpha^2-2g_\alpha\cos\theta)^{3/2}} + (1-\alpha) \cdot \frac{(1-g_\beta^2)}{(1+g_\beta^2-2g_\beta\cos\theta)^{3/2}} \quad (7)$$

式中: g_α 、 g_β 为前向和后向的两个不对称因子; α 为权重。抽样得 Mie 散射后的方位角 θ_m 为:

$$\theta_m = \begin{cases} \arccos\left[\frac{1}{2g_\alpha}\left[1+g_\alpha^2-\left(\frac{1-g_\alpha^2}{(1+g_\alpha^2-2g_\alpha\zeta_\theta)}\right)^2\right]\right] & \zeta_\alpha < \alpha \\ \arccos\left[\frac{1}{2g_\beta}\left[1+g_\beta^2-\left(\frac{1-g_\beta^2}{(1+g_\beta^2-2g_\beta\zeta_\theta)}\right)^2\right]\right] & \zeta_\alpha \geq \alpha \end{cases} \quad (8)$$

式中: ζ_θ 、 ζ_α 为 [0, 1] 内均匀分布的随机数。

从前人计算的结论中, TTHG 散射相函数可以很好地描述后向散射, 但是缺点在于需要确定 3 个

参数, 参数的选取比较困难。

1.2 近似散射相函数对比

首先假设粒子为单分散系的沙尘气溶胶, 粒径为 2 μm, 复折射率为 1.5~0.002 5i, 入射激光波长为 660 nm。在此条件下 4 种近似散射相函数的参数如表 1 所示, 其中 Mie 散射相函数的不对称因子由 Mie 散射理论计算, RHG 方法的不对称因子与 Mie 散射相函数的情况相同; 而 HG* 函数的不对称因子采用改进型的参数 g^* , 如公式(4)所示; TTHG 相函数的不对称因子由正负两部分组成, 对应于散射相位中前向散射和后向散射的部分, TTHG 的参数选取自参考文献[13]。

表 1 近似散射相函数的参数

Tab.1 Parameters of the approximate scattering phase function

Type of scattering phase function	Asymmetry factor(g, g^*)
Mie	0.695 6
HG	0.695 6
HG*	0.632 4
RHG	0.695 6
TTHG	0.714 3, -0.760 6

对比散射相函数, 得到 4 种近似散射相函数和 Mie 散射相函数的对比, 如图 1 所示。在此仿真条件下。粒子的 Mie 散射特性明显, 这时散射能量向 0° 附近的小角度前向散射和 180° 附近的后向散射集中, 这种不对称性使 HG、HG*、RHG 三种近似相函数与 Mie 散射相函数的差异, 增大了仿真的误差。而只有 TTHG 散射相函数有更倾向于小角度前向散射

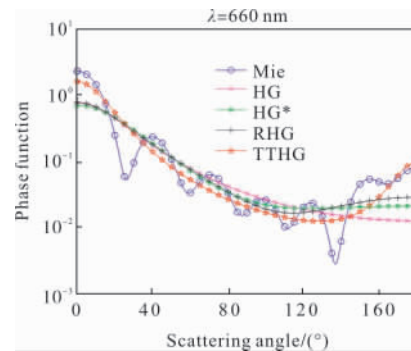


图 1 单分散系下 4 种近似散射相函数对比

Fig.1 Comparison of four approximate scattering phase functions in a single dispersion

和后向散射的趋势。相比之下, TTHG 散射相函数可以更好的模拟真实的散射情况, 因此 TTHG 函数具有明显的优势。

2 基于粒子群优化的 TTHG 相函数

上一节对比了 4 种近似散射相函数, 发现 TTHG 相函数具有明显的优势。但应用 TTHG 相函数时的难点在于参数不易选取, 为寻找最适合的参数, 下面提出了一种基于粒子群优化的 TTHG 相函数。

2.1 粒子群优化算法

粒子群优化 (Particle swarm optimization, PSO) 算法是由 Kennedy 提出的一种群智能算法, 算法核心内容模拟鸟群寻找食物的过程, 鸟之间通过群体协作使集体达到最优目的。鸟群在某个区间内寻找食物, 食物的具体位置是未知的, 但所有的鸟都知道自己当前距离食物还有多远, 也知道哪个同伴距离食物的位置最近。在飞行过程中, 每只鸟都根据自己和同伴的经验, 逐步调整自己的位置, 逐渐接近食物。鸟群的每个单元被称为“粒子”, 每个粒子可视为解空间的一个解。粒子具有位置和速度两个参数, 位置向量表示粒子的解, 速度向量表示粒子的移动能力, 在下一次飞行中移动到新的位置, 实现解的更新。

粒子在寻优过程中根据自己和其他粒子的经验数据调整自己的速度和位置。其中, 单个粒子所经历过的最佳位置为个体最优解 p_{best} , 种群中所有粒子经历的最佳位置称为全局最优解 g_{best} 。通过 p_{best} 和 g_{best} , 粒子群内实现了信息的共享, 从而促进了最优解的搜索。PSO 算法的流程如图 2 所示。

优化算法的具体流程为:

(1) 初始化粒子种群的位置和速度

在 D 维的空间中, 随机生成包括 n 个粒子的种群, 种群的位置信息为 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 其中第 i 个粒子的位置表示为一个 D 维的向量 $X_i=(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iD})^T$, 每个粒子 X_i 都作为 D 维搜索空间中的一个解。随机生成种群的速度信息为 $V=(V_1, V_2, \dots, V_n)$, 第 i 个粒子的速度向量表示为 $V_i=(V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{iD})^T$ 。

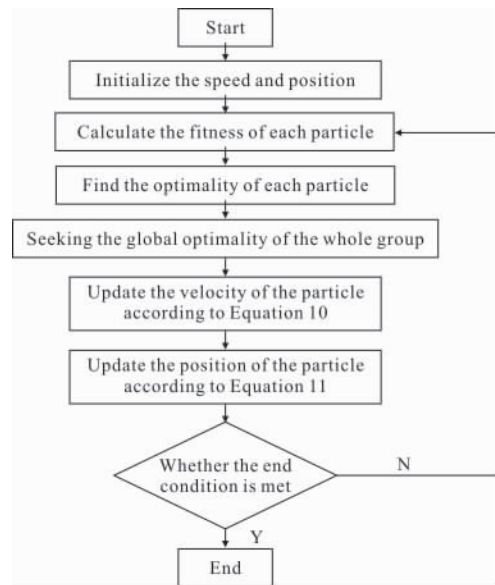


图 2 粒子群优化算法的流程图

Fig.2 Flow chart of the particle swarm optimization algorithm

(2) 计算每个粒子的适应度

根据优化的需求设定目标函数, 分别计算每个粒子的适应度。

为了证明 4 种相函数与 Mie 散射函数在后向散射部分的接近程度, 将 4 种近似散射相函数与 Mie 相位函数在大于 90° 的后向散射方向的均方根误差值设为目标函数, 均方根误差值越小越好。均方根误差可表示为:

$$\sigma_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{\theta=90, 130} [p_x(\theta) - p_{Mie}(\theta)]^2}{19}} \quad (9)$$

(3) 计算种群中单个粒子和整体的最优值

将当前粒子的适应度值与个体最优解 p_{best} 进行对比, 若当前适应度更高则对 p_{best} 进行更新。个体最优值更新完毕后, 依次与全局最优解 g_{best} 进行对比, 若存在更优解则对 g_{best} 进行更新。其中第 i 个粒子的个体极值为 $P_{besti}=(P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{iD})^T$, 种群全局最优解为 $g_{best}=(g_1, g_2, \dots, g_D)^T$ 。

(4) 进行速度和位置的更新

综合个体经验和群体经验, 对每个粒子的速度和位置进行更新, 第 i 个粒子的速度和位置更新方法可表示为:

$$V_i^{k+1} = \omega V_i^k + c_1 r_{1i} (p_{besti}^k - X_i^k) + c_2 r_{2i} (g_{besti}^k - X_i^k) \quad (10)$$

$$X_i^{k+1} = X_i^k + V_i^{k+1} \quad (11)$$

式中： k 为当前迭代次数； c_1 、 c_2 为加速因子； r_{1i} 、 r_{2i} 为 [0,1] 区间内均匀分布的随机数； ω^k 为线性变化的惯性权重，可表示为：

$$\omega^k = \frac{M-k}{M} \cdot (\omega_{\max} - \omega_{\min}) + \omega_{\min} \quad (12)$$

式中： M 为总迭代次数； ω_{\max} 为初始惯性权重； ω_{\min} 为最终惯性权重。

(5) 结束判定

若粒子群体达到足够好的适应值或者预设的最大迭代次数时，结束并返回结果。若没有达到上述条件，则返回第(2)步继续迭代。

2.2 基于粒子群优化的 TTHG 相函数

基于粒子群优化方法进行 TTHG 相函数的参数寻优时，需要同时优化 g_a 、 g_b 、 α 三个参数，因此，设解空间为 3 维空间。设空间中共有 100 个粒子，迭代上限为 100 次，随着迭代次数的增加，惯性权重 ω 从 0.9 线性递减到 0.4，学习因子 $c_1=c_2=1.5$ 。由于优化的目标是使 TTHG 相函数的后向散射部分能够逼近 Mie 散射相函数，因此，目标函数选取两种相函数后向散射部分的均方误差，与公式(9)形式一致。

以有效半径 $r_{\text{eff}}=1.85 \mu\text{m}$ 、有效方差 $v_{\text{eff}}=0.51$ 的对数正态分布的沙尘气溶胶为例，在入射激光波长为 490 nm 时，利用粒子群优化方法在解空间中搜索合适的 g_a 、 g_b 和 α ，参数的目标函数随优化算法迭代次数而变化的曲线如图 3 所示。

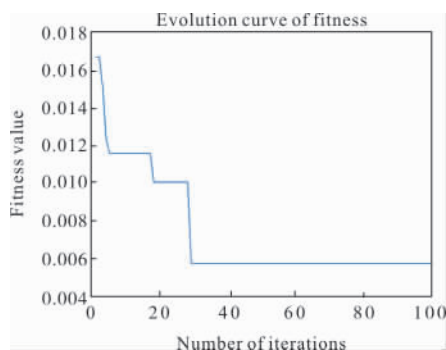


图 3 适应度进化曲线

Fig.3 Evolution curve of fitness

从图 3 可以看出：粒子群优化算法的结果很快就可以收敛，计算的目标函数值在 30 代以后就不再变小，此时粒子群算法已经寻找到了最合适的 g_a 、 g_b 、 α 。

在 550、660、860 nm、1.06、3.4 μm 等波长条件下，粒子群优化算法同样具有很快的收敛速度，根据优化结果得到的 6 组参数分别如表 2 所示。

表 2 基于粒子群优化的 TTHG 相函数参数

Tab.2 Parameters of TTHG phase function based on particle swarm optimization

Wavelength/ μm	α	g_a	g_b
0.49	0.963 8	0.780 6	-0.635 9
0.55	0.926 3	0.776 9	-0.548 9
0.66	0.902 2	0.795 8	-0.570 9
0.86	0.946 0	0.773 7	-0.648 5
1.06	0.959 6	0.729 1	-0.602 1
3.4	0.989 8	0.692 0	-0.575 7

将基于粒子群优化得到的 TTHG 相函数与 HG、HG*、RHG 进行对比，得到图 4。可以看出：在前向散射部分，4 种近似相函数与 Mie 散射相位函数比较接近，整体差别较小。但在散射角大于 120° 的后向散射部分，4 种相函数展现出不同的特性。在后向散射部分，HG* 和 RHG 相函数有逐渐接近 Mie 散射相函数的趋势，但仍有很大差距，后向散射发生的概率始终相差数倍。这意味着在仿真中应用 HG、HG* 或 RHG 相函数时，后向散射回波的能量与实际情况相比将相差数倍，造成严重的误差。而经过优化后 TTHG 相函数的后向散射部分与 Mie 散射十分接近，拟合效果远好于另外三种函数，可以更加精确地模拟气溶胶粒子的散射特性，特别是角度大于 120° 的后向散射特性。

将图 4(a)~(f) 进行对比可以发现：当气溶胶粒径参数一定时，入射激光的波长越小，Mie 散射的不对称性就越明显。这时散射能量向 0° 附近的小角度前向散射和 180° 附近的后向散射集中，这种不对称性进一步拉大了 HG、HG*、RHG 三种近似相函数与 Mie 散射相函数的差异，增大了仿真的误差。而 TTHG 相函数在这种情况下也可以很好地拟合 Mie 散射函数，因此，TTHG 相函数在小波长、大尺度数情况下的优势更加明显。

与图 4 中未进行粒子群优化的 TTHG 相函数相比，明显可以看出优化后的 TTHG 相函数与实际情况更加接近。不仅临近 180° 散射区域十分接近，在前向等其他散射角度与 Mie 散射相函数的拟合度也

很好。未优化的 TTHG 参数对不同波长和粒径的适应性不好,当波长或粒径改变时,由于新的散射情况发生了变化,TTHG 相函数与实际散射情况的拟合度可能会下降。而基于粒子群优化的 TTHG 相函数的三个参数是根据激光波长和粒径大小动态寻优的,即使波长或粒径在较大范围内波动(即尺度数变化区间很大),只需进行相应的参数调整,便可以与实际散射情况重新拟合。

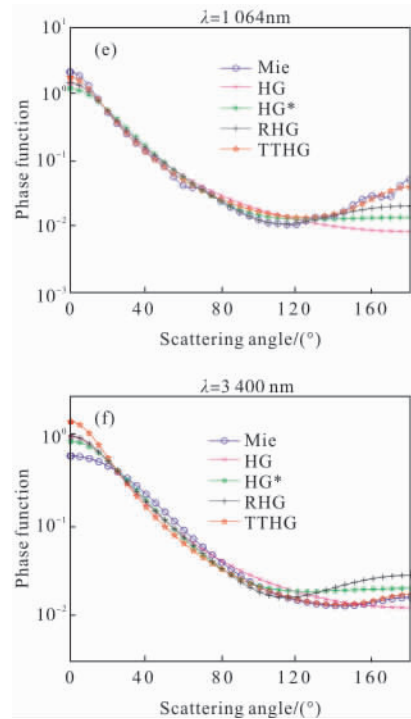
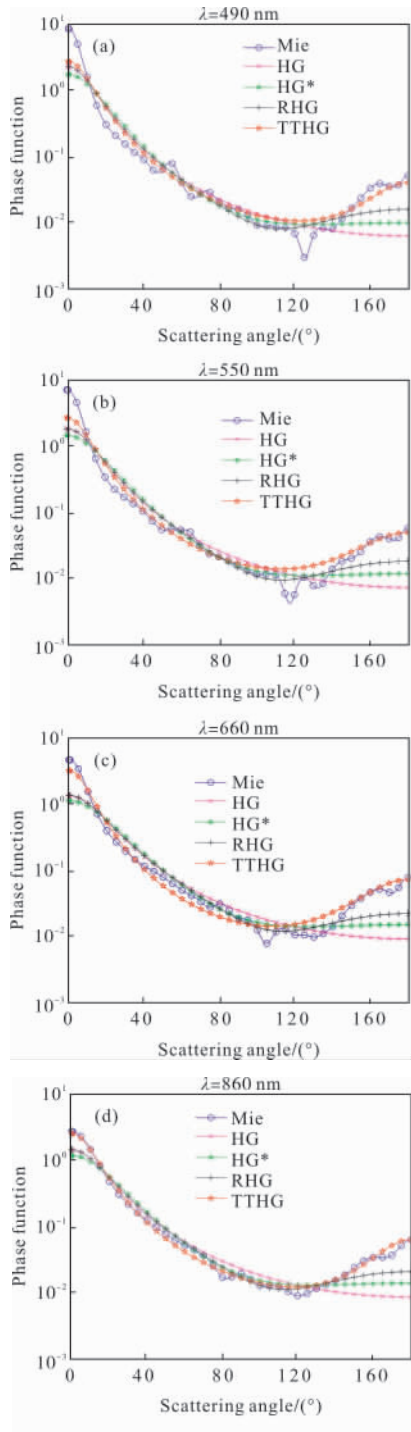


图 4 不同波长条件下的散射相函数曲线

Fig.4 Scattering phase function λ curves at different wavelengths

为了进一步说明基于粒子群优化的 TTHG 相函数的优越性,比较了 HG、HG*、RHG 和优化前后的 TTHG 函数与 Mie 相位函数在大于 90° 的后向散射方向的均方根误差值,如表 3 所示,表中 TTHG 表示未优化的 TTHG 相函数,PSO-TTHG 表示基于粒子群优化的 TTHG 相函数。可以看出:经过粒子群优化之后的 TTHG 相函数的均方误差明显小于优化之前的相函数,更是远远小于 HG、HG* 和 RHG 等其

表 3 多种散射相函数与 Mie 散射相函数的均方误差

Tab.3 Mean square errors of several scattering phase functions and Mie scattering phase functions

Wavelength / μm	HG	HG*	RHG	TTHG	PSO-TTHG
0.49	0.018 2	0.016 2	0.013 3	0.008 7	0.005 3
0.55	0.019 9	0.017 4	0.014 2	0.011 2	0.005 4
0.66	0.025 4	0.022 1	0.018 6	0.012 4	0.007 1
0.86	0.020 1	0.017 2	0.013 8	0.012 4	0.004 6
1.06	0.015 8	0.012 7	0.009 4	0.017 0	0.004 0
3.4	0.002 9	0.004 2	0.007 4	0.002 4	0.000 7

他近似散射相函数, 该结果定量地说明了基于粒子群优化的 TTHG 相函数对于 Mie 相位函数的拟合效果更好, 用该函数进行蒙特卡罗仿真的散射角度抽样可以得到更精确的结果。

3 结 论

文中基于改进型蒙特卡罗方法建立了气溶胶的多重散射模型。首先简要介绍了蒙特卡罗方法, 并基于蒙特卡罗方法建立了气溶胶多重散射模型。针对蒙特卡罗仿真中散射角度抽样中后向散射结果不准确的问题, 对比了前人提出的几种近似散射相函数, 并提出了基于粒子群优化的 TTHG 散射相函数, 这种相函数可以更好地逼近实际散射情况, 得到更精确的蒙特卡罗仿真结果。

后续将进一步研究 5 阶及更高阶的近似散射相函数及其二项改进形式的仿真效果, 并得出关于多重散射效果的定性结论。

参 考 文 献:

[1] Wu Zhensen, You Jinguang, Yang Ruike. Study on the attenuation characteristics of laser in sandstorm [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2004, 31 (9): 1075–1080. (in Chinese)
吴振森, 由金光, 杨瑞科. 激光在沙尘暴中的衰减特性研究[J]. 中国激光, 2004, 31(9): 1075–1080.

[2] Huang Chaojun, Wu Zhensen, Liu Yafeng, et al. Numerical calculation of scattering phase function of atmospheric aerosol particles [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(3): 580–585. (in Chinese)
黄朝军, 吴振森, 刘亚锋, 等. 大气气溶胶粒子散射相函数的数值计算[J]. 红外与激光工程, 2012, 41(3): 580–585.

[3] Song Xueping, Jia Xiaodong, Qin Yifan, et al. Experimental study on backscattering characteristics of cloud by laser [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2010, 39(2): 260–265. (in Chinese)
宋雪平, 贾晓东, 覃一凡, 等. 云雾对激光后向散射特性试验研究[J]. 红外与激光工程, 2010, 39(2): 260–265.

[4] Wang Z, Cui S, Yang J, et al. A novel hybrid scattering order-dependent variance reduction method for Monte

Carlo simulations of radiative transfer in cloudy atmosphere [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2017, 189: 283–302.

[5] Ramella-Roman J, Prahl S, Jacques S. Three Monte Carlo programs of polarized light transport into scattering media: part I [J]. *Opt Express*, 2005, 13(12): 4420–4438.

[6] Colombi J, Louedec K. Monte Carlo simulation of light scattering in the atmosphere and effect of atmospheric aerosols on the point spread function [J]. *J Opt Soc Am A Opt Image Sci Vis*, 2013, 30(11): 2244–2252.

[7] Sharma S K. Light Scattering Reviews 9—A Review of Approximate Analytic Light-Scattering Phase Functions [M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015: 53–100.

[8] Huang Y, Liu G, Jin W, et al. Comparison study of several underwater light scattering phase functions [J]. *Optoelectronics Letters*, 2012, 8(3): 233–236.

[9] Cheng Chen. Monte Carlo simulation of spaceborne laser radar radiation transmission [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2018. (in Chinese)
程晨. 星载激光雷达辐射传输蒙特卡罗模拟[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2018.

[10] Cheng Chen, Xu Qingshan, Zhu Lin. Empirical formula of scattering phase function of non-spherical aerosol particles: The 34th Annual Meeting of Chinese Meteorological Society [Z]. 2017. (in Chinese)
程晨, 徐青山, 朱琳. 非球形气溶胶粒子散射相函数经验公式研究: 第 34 届中国气象学会年会[Z]. 2017.

[11] Tassan S, Ferrari G M. Proposal for the measurement of backward and total scattering by mineral particles suspended in water [J]. *Applied Optics*, 1995, 34(36): 8345.

[12] Selden A C. Attenuation and impulse response for multiple scattering of light in atmospheric clouds and aerosols[J]. *Applied Optics*, 2006, 45(13): 3144.

[13] Kattawar G W. A three-parameter analytic phase function for multiple scattering calculations[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 1975, 15(9): 839–849.