三维无规则不均匀折射率场光线追迹新方法

熊浩西,易仕和,丁浩林,徐席旺,欧阳天赐

(国防科技大学 空天科学学院,湖南 长沙 410073)

摘　要:飞行器在大气层中高速飞行时,气动加热,光学窗口与外部气流相互作用形成了复杂的流场结构。其折射率分布无规则、不均匀,很难准确得到光线的传播路径。为此,提出三种四阶精度方法的光线追迹方案,通过与螺旋光线解析解结果进行对比,发现四阶 Runge-Kutta 方法光线追迹过程中最大相对误差为 1.6×10^{-8},Richardson 外推法为 1.2×10^{-8},Adams 线性多步法为 1.2×10^{-11},确定 Adams 线性多步法是可用于光线追迹的高精度、高速的方法。基于多项式拟合的任意点插值方法可以获得比距离反比法更高的折射率场插值精度。并将该方法运用在导弹的光学窗口附近流场引起的波前畸变的计算,对计算结果进行了对比,结果表明 Adams 线性多步法以 Runge-Kutta 方法起步,但 Admas 方法没有忽略前一步的计算结果,不会带来误差的累积,所以结果更接近真实解,而 Richardson 外推方法算出的光程差大小与其他两种方法明显不同。

关键词:非均匀介质;　折射率;　高精度;　光线追迹

中图分类号:O435　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.3788/IRLA201948.0503005

New ray tracing method for 3D irregular non-uniform refractive index field

Xiong Haoxi, Yi Shihe, Ding Haolin, Xu Xiwang, Ouyang Tianci

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: When a flight flies at high speed in the atmospheric, aerodynamic heating, the optical window interacts with the external airflow to form a complex flow field structure. Its refractive index distribution was irregular and non-uniform, so it was difficult to accurately obtain the ray trajectory. In order to obtain accurate ray trajectory, three ray tracing methods with fourth-order accuracy were proposed. Via comparing the results with the analytical solutions of helical rays, it is found that the maximum relative error of the fourth-order Runge-Kutta method is 1.6×10^{-8}, Richardson extrapolation method is 1.2×10^{-8}, and Adams method is 1.2×10^{-11}. The Adams method is a high-precision and high-speed method for ray tracing. An arbitrary point interpolation method based on the polynomial fitting can obtain higher accuracy refractive index field than that computed by distance inverse ratio method. The method was applied to compute the distorted wavefront caused by the flow field around the optical window of a

收稿日期:2018-12-11;　**修订日期**:2019-01-15

基金项目:国家自然科学基金(11527802)

作者简介:熊浩西(1995-),男,硕士生,主要从事航空航天气动光学方面的研究。Email:690878706@qq.com

导师简介:易仕和(1965-),男,教授,博士生导师,博士,主要从事航天气动光学与成像制导技术等方面的研究。Email:yishihe_gfkd@foxmail.com

missile, and the calculation results were compared. It is found that Adams linear multi-step method starts with Runge-Kutta method, but Admas method does not neglect the calculation results of the previous step and will not lead to the accumulation of errors, so the results are closer to the real solution, while Richardson extrapolation method calculates the optical path difference significantly different from the other two algorithms.

Key words: inhomogeneous medium; refractive index; high precision; ray tracing

0 引 言

随着光学行业制造工艺的进步，光学系统的精度也逐渐提高,因此成像系统应用的范围更加广泛,但是光学系统中的光学介质折射率往往具有不均匀性、无规则性,这类非均匀无规则折射率介质的随机性特征会对系统的性能造成重要的影响，有时甚至成为影响系统成像质量的关键因素。比如高精度干涉仪中的标准镜，制造材料的非均匀性就很大程度决定了其测量的精度;而且,当成像制导导弹在大气中高速飞行时，成像的光学窗口与外部气流相互作用形成复杂的流场结构,包括激波、膨胀波和强湍流边界层[1-2],用于成像的光学系统发射的光线通过流场时,往往会由于流场中介质的不稳定,存在气流湍流和扰动,使得目标图像出现偏移、抖动以及模糊,这就发展出气动光学这门单独研究流场对成像质量影响的学科;可见,有必要按照光学理论,准确地得到通过光学系统的光线径迹，上述过程被称为光线追迹。

光线追迹理论研究非均匀、无规则折射率介质与日俱进。1968 年,Matthew P. Rimmer 提出了利用泰勒级数求解光线方程的方法对非均匀介质进行光线追迹[3],这为今后研究光线在非均匀无规则介质中的传播问题有了很好的参考。2007 年，浙江大学现代光学仪器国家重点实验室的李晓彤等对三维无规则折射率场的描述提出了方法，并对二维无规则折射率场进行了方法准确性验证。提出了自适应网格的方法用于描述变折射率场，从而提高了数值模拟的效率[4]。2010 年,国防科技大学航天与材料工程学院的冯定华等利用欧拉方法,泰勒公式法和Runge-Kutta 方法对特殊的三维螺旋线光线进行了光线追迹,并对三种方法进行了相关的评价[5];2012 年,Kalish S 等利用传输矩阵方法研究了具有对称折射率的三维随机层状光学介质的散射特性[6];2017 年,Lin Psang Dain 等[7]通过构建三维矩阵方程,用于追迹含有三角形棱镜的光学系统中的近轴光线。2017 年,吕美波等[8]从理论上分析了由单轴吸收材料制成的罗森棱镜中传播的非均匀平面波。用三维光线追迹方法推导了有耗罗克逊棱镜中普通波和特殊波的传播方向和衰减方向的表达式。2017 年,王业军等[9]利用光线追迹方法模拟了气相介质中压力和温度梯度引起的光束转向效应。2018 年,Paces Pavel 等[10]通过光线追迹方法,从飞行数据出发,对多种光学测量方法、飞机性能评价原理以及使用飞行时间摄像机的方法的精度进行了评价。2018 年,侣同岭等[11]通过三维光线追迹方法,研究了 LED 裸眼三维显示技术的准直性。2019 年,刘万国等[12]通过第一积分方法求解三维光线方程,通过设置三维梯度折射率(GRIN)介质的分布函数,可以控制光线沿理想曲线传播,调整入射和输出光线,还可以使用迹线绘制几何图形,为光线追迹方法在透镜、分束器、超曲面和光导纤维中的应用打下基础。

光线追迹理论有了长足的发展，创造出了各种理论和方法，如今较为流行的是基于四阶 Runge-Kutta 的光线追迹法,但该方法由于是单步法,丢失了很多前次计算的信息,所以精度不高;并且很多方法都是在某些特定条件下才可以使用的，一般都是运用于折射率连续介质，对于无规则介质折射率场的描述方法研究较少，不是所有的非均匀介质的折射率分布都可以用确定的公式描述，特别是随机介质的折射率场,其折射率随机变化的特征,所以就需要使用离散化采样的近似处理方法来对其进行描述。折射率场描述方法的好坏会直接影响到后续的

光线追迹的准确性。一般通过插值方法对离散折射率场进行描述。常用的插值方法有简单线性插值、双三次样条插值、线性插值法,距离加权平均插值法以及有限元法等，但这些方法的精度及其使用便利性往往不如多项式拟合法，高精度光学玻璃的非均匀性利用 Zemike 多项式进行拟合就具有很高的精度，然而大部分的不均匀无规则折射率场是三维分布的，而 Zemike 多项式是建立在二维极坐标基础上的，在光线追迹过程中还需转换为直角坐标系来求得折射率梯度,过程很复杂;三维折射率场中每处的折射率都是与三维坐标相关的，多项式拟合法插值往往会带来很大误差,而且不便于使用。

文中提出了三种四阶精度光线追迹方法并研究其优缺点,得到了高精度,高速的光线追迹新方法;在传统多项式拟合方法的基础上，在直角坐标三个方向使用多项式拟合，解决了传统多项式拟合方法在三维条件下不便使用的问题，同时解决了以往研究中对三维无规则非均匀介质折射率场经常运用距离反比插值法描述任意点折射率产生的低精度的问题，通过对三维导弹的光学窗口区域的流场运用该方法,进行光线追迹,比较了计算结果。

1 光学基本原理

1.1 Gladstone-Dale 关系式

光线在流动气体中传播，气体折射率 n 及其密度 ρ 符合 Gladstone-Dale 关系式：

$$n=1+\rho K(\lambda) \tag{1}$$

式中：$K(\lambda)$为 Gladstone-Dale 常数，与光的波长有关[18]。则

$$K(\lambda)=2.224\,4\times10^{-4}\left(1+\left(\frac{6.713\,2\times10^{-8}}{\lambda}\right)^{2}\right) \tag{2}$$

当光线波长位于红外波段时，

$$K(\lambda)=2.23\times10^{-4}\left(1+\frac{7.52\times10^{-15}}{\lambda^{2}}\right) \tag{3}$$

所以,只要知道飞行器外流密度场,便能算出折射率场,接下来考虑折射率场中的光线追迹。

1.2 基于流场的光线追迹法

光线追迹法最终是为了求得光线在介质中传播的轨迹，而光线在每一时刻的位置可用光线矢径 r，光线方向矢量 T 表示，将光线任意时刻的位置连接起来即为光线的传播轨迹。

光线在梯度折射率介质中传输时，要得到其传播轨迹,可以求解光线传播方程得到,但只有在极少数情况下可以求得介质中光线方程的解析解，大部分情况下是没有解析解的，必须通过其他方法对光线传输进行追迹,光线传输方程如下：

$$\frac{d}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)=\nabla n \tag{4}$$

式中:s 为光线传播路径上的弧长;r 为光线矢径;n为折射率;∇n 为折射率梯度。大多数情况下,该方程无法求出精确解,可以通过数值方法求解,可以将光线公式(4)写成一组一阶微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}=g(t_n,T_n)=\nabla n\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}=f(t_n,r_n)=\dfrac{1}{n}T\end{cases} \tag{5}$$

这个方程组有三个分量,如下：

$$r=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},T=\begin{pmatrix}T_x\\T_y\\T_z\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\end{pmatrix},D=n\begin{pmatrix}\dfrac{\partial n}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial n}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial n}{\partial z}\end{pmatrix} \tag{6}$$

式中:$T=n\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$为光线矢量,由于公式(5)是耦合的,所以公式(5)中的一阶微分方程组需要进行联立求解。由于公式(5)一般没有解析解,求解公式(5)这类微分方程组,可采用数值求解方法。

1.2.1 方法 1

首先采用四阶 Runge-Kutta 方法展开数值求解微分方程组(5)：

$$\begin{cases}r_{n+1}=r_n+\dfrac{1}{6}h\left\{T_n+2\left[T_n+\dfrac{h}{2}D(r_n)\right]+2\left[T_n+\dfrac{h}{2}D\left(r_n+\dfrac{h}{2}T_n\right)\right]+T_n+hD\left(r_n+\dfrac{h}{2}T_n+\dfrac{h^2}{4}D(r_n)\right)\right\}\\[2ex]T_{n+1}=T_n+\dfrac{1}{6}h\left\{D(r_n)+2D\left(r_n+\dfrac{h}{2}T_n\right)+2D\left[r_n+\dfrac{h}{2}T_n+\dfrac{h^2}{4}D(r_n)\right]+D\left[r_n+hT_n+\dfrac{h^2}{2}D(r_n)\right]\right\}\end{cases} \tag{7}$$

已知光线的初始点 r_n,T_n,可以求得公式(7)中的所需的函数 $D(x)$,光线矢径 r 和光线矢量 T,然后代入公式(7),可以得到下一点的坐标 r_{n+1},T_{n+1},重复上述过程，就可以得到光线在任意折射率分布的介质

中的轨迹。

1.2.2 方法 2

首先利用二阶 Runge-Kutta 方法推导出光线方程的数值解,然后利用 Richardson 外推方法,加快计算速度,同时使数值精度达到了四阶。通过二阶 Runge-Kutta 方法展开数值求解微分方程组(5):

$$\begin{cases} r_{n+1,h}=r_{n,h}+hf\left(t_n+\frac{h}{2},r_n+\frac{h}{2}f(t_n,r_n)\right) \\ T_{n+1,h}=T_{n,h}+hg\left(t_n+\frac{h}{2},T_n+\frac{h}{2}g(t_n,T_n)\right) \end{cases} \tag{8}$$

以步长 h 进行追迹,由步长 $\frac{h}{2}$ 进行光线追迹,求得 t_n 处的数值解:

$$\begin{cases} r_{n+1,\frac{h}{2}}=r_{n,\frac{h}{2}}+\frac{h}{2}f\left[r_n+\frac{h}{4},r_n+\frac{h}{4}f(t_n,r_n)\right] \\ T_{n+1,\frac{h}{2}}=T_{n,\frac{h}{2}}+\frac{h}{2}g\left[r_n+\frac{h}{4},T_n+\frac{h}{4}f(t_n,T_n)\right] \end{cases} \tag{9}$$

由步长为 $\frac{h}{2}$ 时的二阶 Runge-Kutta 方法计算的 t_n 处的数值解与步长为 $\frac{h}{2}$ 时的二阶 Runge-Kutta 方法计算的 t_n 处的数值解进行外推,得到二阶 Runge-Kutta 方法的外推加速公式为:

$$r_{n+1}=\frac{(4r_{n+1,\frac{h}{2}}-r_{n+1,h})}{3} \tag{10}$$

1.2.3 方法 3

文中采用四阶精度的 Adams 内插方法对光线方程进行数值求解,表达式如下:

$$\begin{cases} r_{n+4}^{0}=r_{n+3}+\frac{h}{24}(55f_{n+3}-59f_{n+2}+37f_{n+1}-9f_n) \\ T_{n+4}^{0}=T_{n+3}+\frac{h}{24}(55g_{n+3}-59g_{n+2}+37g_{n+1}-9g_n) \\ r_{n+4}^{1}=r_{n+3}+\frac{h}{24}(9f_{n+4}^{0}+19f_{n+3}-5f_{n+2}+f_{n+1}) \\ T_{n+4}^{1}=T_{n+3}+\frac{h}{24}(9g_{n+4}^{0}+19g_{n+3}-5g_{n+2}+g_{n+1}) \end{cases} \tag{11}$$

式中:$f_n,f_{n+1},f_{n+2},f_{n+3},g_n,g_{n+1},g_{n+2},g_{n+3}$ 为公式(5)中的导数项,上述方法不能自启动,文中通过四阶 Runge-Kutta 方法进行初始计算,当 n=1 时,f,g 函数通过公式(8)进行计算,f_1,g_1 是初始时的导数值:

$$\begin{cases} f_1=\frac{T_0}{n_0} \\ g_1=\nabla n_0 \end{cases} \tag{12}$$

式中:T_0,n_0 分别为光线追迹的起点位置时的光线的方向矢量和此处的折射率;∇n_0 为初始点处的折射率梯度;f_2,g_2 为第一次通过四阶 Runge-Kutta 方法进行光线追迹后的光线所在点的导数值。

同理,$T_1,n_1,\nabla n_1$ 为第一次追迹后光线所在点的光线的方向矢量,折射率以及折射率梯度值,可通过公式(7)求得。

同理可计算得到 f_3,g_3,f_4,g_4,通过公式(11),则可得到一次光线追迹后的光线包含的信息,此时追迹步长为 h,此时的结果为 $r^0(h),T^0(h)$,属于显式Adams 方法求解微分方程的结果,为了增加精度,可以通过公式(11)进行多次内迭代,得到精度更高的解 $r(h)$,$T(h)$,当某一次的迭代结果满足要求时,进行下一次光线追迹,重复以上过程,直到完成整个追迹过程。

1.3 光线追迹数值方法验证与选取

为了验证数值方法的准确性,考虑折射率径向梯度分布的三维螺旋线情况。文中运用上述三种方法进行光线追迹数值求解,并与精确解进行比较,来考察三种方法精度和计算速度。

折射率径向分布的三维螺旋光线的折射率分布如下:

$$n(x,y)=n(0)\sqrt{1-\partial^2(x^2+y^2)} \tag{13}$$

设 x_0,y_0,z_0 为初始位置坐标,p_0,q_0,L_0 为对应的光线方向矢量,当 p_0=0,$x_0=\frac{q_0}{n(0)\alpha}$,$y_0$=0 时,精确解如下:

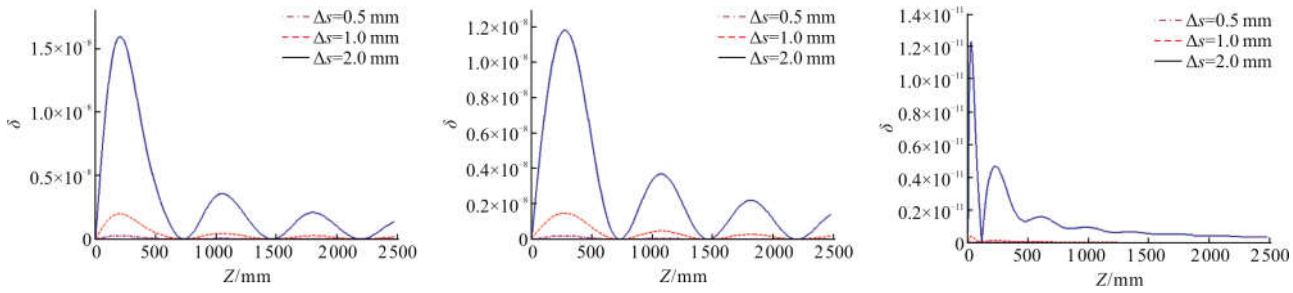
$$\begin{cases} x=x_0\cos\left(\frac{n(0)\alpha}{L_0}z\right) \\ y=x_0\sin\left(\frac{n(0)\alpha}{L_0}z\right) \end{cases} \tag{14}$$

定义 $\delta_i=\frac{|r_i-r_i'|}{|r_i|}$ 为相对误差,用于判断数值解法结果的准确性,计算中取 α=0.01,$n(0)$=1.5,空间追迹步长 Δs 分别取 0.5、1.0、2.0 mm,沿着 z 方向追迹 2 500 mm。

1.3.1 折射率连续分布情况

已知公式(13)所表示的介质折射率分布的解析式,即折射率是空间连续分布的。进行光线追迹时,所需的折射率 n 由公式(13)直接求解,折射率梯度可通过对公式(13)求导数得到,无需进行插值,对于已知折射率梯度分布情况的仿真计算的相对误差结果如下:

图 1 结果可知,对于介质折射率连续分布的情况,上述三种方法理论上说都为四阶精度[13-14],但四阶 Runge-Kutta 方法计算精度最低,其次是Richardson 外推法,Adams 线性多步法计算精度最高,这三种仿真方法在开始误差都快速上升,达到一个峰值,然后四阶 Runge-Kutta 方法和 Richardson 外推法开始发



(a) 四阶 Runge-Kutta 方法仿真误差

(a) Simulation error of fourth-order Runge-Kutta method

(b) Richardson 外推方法仿真误差

(b) Simulation error of Richardson extrapolation method

(c) Adams 线性多步法仿真误差

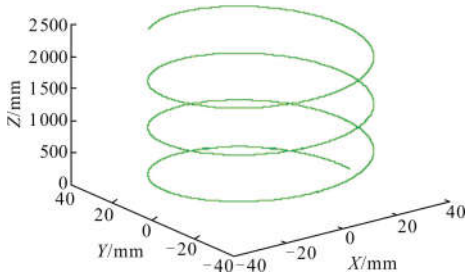
(c) Simulation error of Adams linear multistep method

图 1 数值仿真误差(折射率连续分布)

Fig.1 Numerical simulation error (Refractive index continuous distribution)

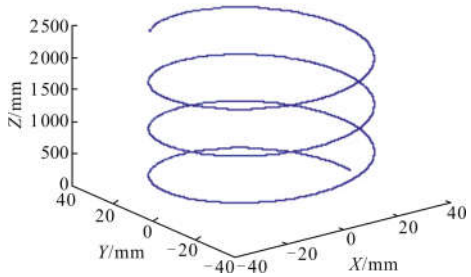
生衰减型震荡,Adams 线性多步法产生一次震荡后误差逐渐下降之后保持平稳；这是由于四阶 Runge-Kutta 方法和 Richardson 外推法是单步法，在进行第二步之前就丢弃所有先前的信息。而 Adams 方法是多步法，能通过保留和使用先前步骤的信息而不是尝试丢弃它来提高效率，所以多步法的计算精度更高而计算时间更长。当追迹步长改变的同时,Adams 线性多步法对步长最敏感,步长缩小 1 倍,精度提高 10 倍左右,而且步长越小,仿真结果精度越高。

图 2 是螺旋光线在连续折射率情况下追迹三维平面上的轨迹结果,可以看出,这三种方法能很好地追踪出螺旋光线的轨迹，与精确解的螺旋光线轨迹十分相似，这说明理论上的四阶精度方法能很好地追踪出光线轨迹。



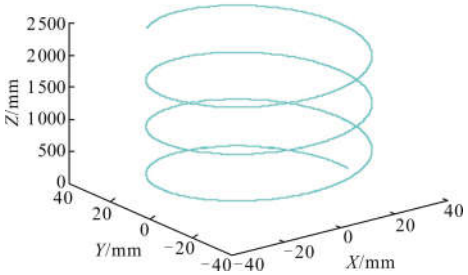
(c) Richardson 外推方法

(c) Richardson extrapolation method



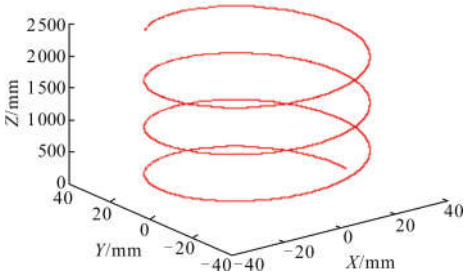
(a) 精确解

(a) Exact solution



(d) Adams 线性多步法

(d) Adams linear multistep method



(b) 四阶 Runge-Kutta 方法

(b) Fourth-order Runge-Kutta method

图 2 Δs=1.00 mm 时精确解和数值解的结果对比

Fig.2 Comparison of results between exact solutions and numerical solutions (Δs=1.00 mm)

表 1 是三种方法的计算时间。

由此来看，四阶 Runge-Kutta 方法用时最短，

Adams 线性多步法次之,Richardson 外推法用时最长,可以看出 Richardson 外推法的用时远大于其他两种方法,这是由于此方法多次使用不同步长的结果进行校正;结合追迹精度来看,Adams 线性多步法是四阶精度方法中的最佳选择(针对折射率连续分布情况)。

表 1 计算时间

Tab.1 Computing time

Computing time/s·mm^{-1}	Fourth-order Runge-Kutta method	Richardson extrapolation method	Adams method
ds=0.5	0.237	0.292	0.245
ds=1.0	0.122	0.149	0.132
ds=2.0	0.086	0.104	0.115

1.3.2 折射率离散分布情况

实际的折射率场可能是不连续的,无相关函数表达式,无规则不均匀变化的情况。对于光线追迹方法要考虑,当折射率离散分布时,只知道空间离散点折射率的值,离散点的梯度未知,运用插值方法求解追迹路径上所需各点的折射率和折射率梯度。在插值方法中,常用最近邻法,线性插值法和距离反比法进行插值,其中精度最高的距离反比法也只能达到 10^{-4} 量级,并且花费更长的计算时间,并且在网格上的点进行插值也会降低精度;现今由于神经网络兴起而提出的运用广义回归神经网络方法来解决折射率插值问题的方法,增加精度便意味着增多训练次数,必然导致花费更多时间,也不是实用的方法。而精度比较高的插值方法是多项式拟合法,但此方法本质上只是对一个变量进行拟合,得到的拟合关系只是一个变量的函数,后来发展出的 Zemike 多项式拟合法得到的拟合关系也只是两个变量的函数,对于三维无规则不均匀介质折射率场,需要拟合的量(折射率)往往与其空间位置有关,所以文中基于多项式拟合方法进行了三个方向的多项式拟合。

1.3.2.1 折射率插值及其折射率梯度

为了对空间内任意一点 P 进行高精度插值计算,如图 3 所示,其中的网格线为折射率分布线,分别从 P 点沿着 X,Y,Z 三个方向寻找网格面上的映射点,图 3 中,在 X 方向有 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$,Y 方向有 $M_1,M_2,\cdots,M_n$,Z 方向有 $N_1,N_2,\cdots,N_n$;分别对三个方向进行多项式插值。

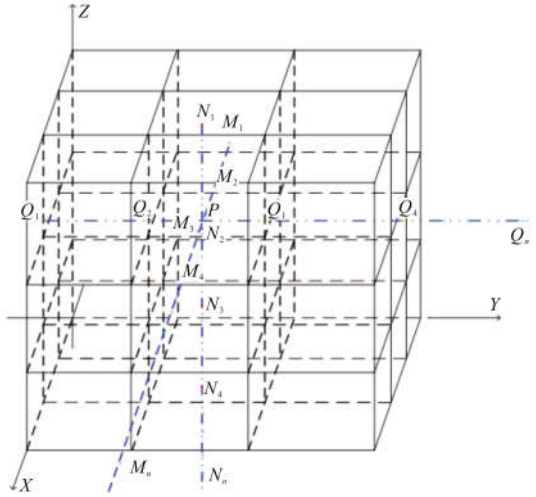


图 3 基于多项式拟合的折射率插值法原理图

Fig.3 Principle diagram of refractive index interpolation method based on polynomial fitting

沿着 Y 方向多项式拟合,便能获得 P 点折射率,其拟合函数可写作:

$$n(y)=a_{0Y}+a_{1Y}y+a_{2Y}y^2+\cdots+a_{mY}y^m \tag{15}$$

同理,依照上过程,沿不同方向进行多项式拟合(需用到图 3 中其他方向投影点),可获得过 P 点沿 X,Z 方向的拟合函数:$n(X)$,$n(Z)$:

$$n(X)=a_{0X}+a_{1X}x+a_{2X}x^2+\cdots+a_{mX}x^m \tag{16}$$

$$n(Z)=a_{0Z}+a_{1Z}z+a_{2Z}z^2+\cdots+a_{mZ}z^m \tag{17}$$

由于三个方向的多项式拟合会对结果造成误差,认为每个方向进行拟合对 P 点的折射率贡献权重相等,所以 P 点的折射率定义为:

$$n(P)=\frac{w_x\cdot n(x_p)+w_y\cdot n(y_p)+w_z\cdot n(z_p)}{w_x+w_y+w_z} \tag{18}$$

式中:w 为权重函数,$w_x,w_y,w_z=1$,这样能减少多次多项式拟合带来的误差。折射率梯度通过三个方向求导得到。

1.3.2.2 考虑插值阶数的影响

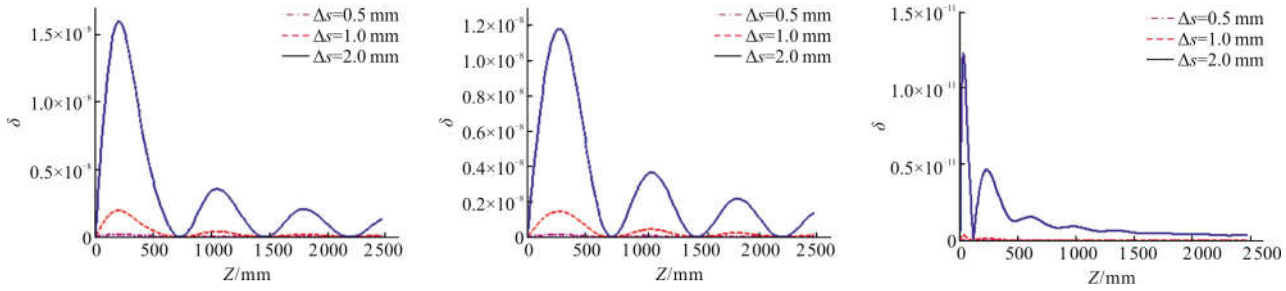
对于任一点插值拟合方法中,所取的插值拟合点数目不同,拟合阶数不同,并不是拟合阶数越大,精度越高,阶数越大,多项式拟合需要点数越多,计算所需时间越多,文中选用九阶多项式拟合方法进行计算。

1.3.2.3 方法精度验证

为比较上述插值法进行方法精度和耗时,考虑到折射率径向分布,在 X,Y,Z 三个方向上按照间隔

$\Delta X=\Delta Y=1$ mm，$\Delta Z=5$ mm 将空间划分为众多离散网格点，网格点上的折射率和折射率梯度根据上文中的任一点多项式拟合插值法求得，在此离散空间内，用四阶 Runge-Kutta 方法，Richardson 外推法以及 Adams 线性多步法这三种方法对光线进行追迹仿真计算，得到结果如下：

比较图 1 与图 4，可以看出折射率离散分布时结果的相对误差 δ 与折射率连续分布式的结果的 δ 基本相同，证明并未因为插值计算精度降低。



(a) 四阶 Runge-Kutta 方法仿真误差

(a) Fourth-order Runge-Kutta method simulation error

(b) Richardson 外推方法仿真误差

(b) Simulation error of Richardson extrapolation method

(c) Adams 线性多步法仿真误差

(c) Simulation error of Adams linear multistep method

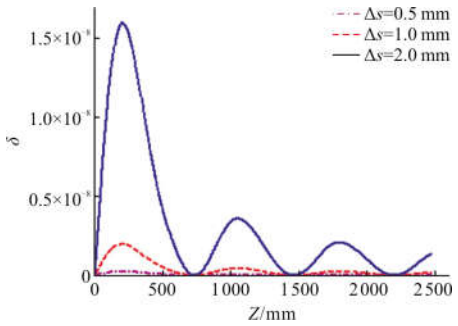
图 4 数值仿真误差(折射率离散分布)

Fig.4 Numerical simulation error (Discrete distribution of refractive index)

在折射率离散分布时，Adams 线性多步法的计算时间最短，其次是四阶 Runge-Kutta 方法，最后是 Richardson 外推法，这是因为 Adams 线性多步法启动后，只需调用前几步的结果迭代计算，而四阶 Runge-Kutta 方法，Richardson 外推法需要重新调用函数计算下一步中的光线位置和方向，函数复杂，所以耗时更多。在计算量大的情况下，Adams 线性多步法便体现出其耗时少的特点。

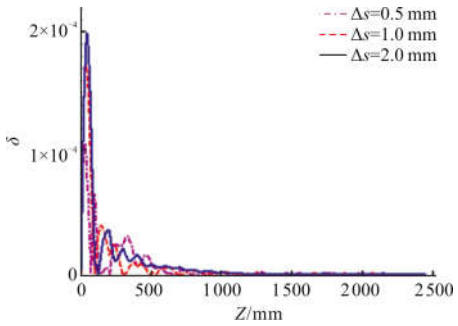
图 5 为距离反比法插值方法的相对误差 δ 与基于多项式拟合的插值方法相对误差 δ 的比较图。

可以看出，距离反比插值法的计算精度明显不如文中插值方法，表 2 为两种插值方法的计算时间。



(a) 基于多项式拟合插值

(a) Interpolation based on polynomial fitting



(b) 距离反比法插值

(b) Distance inverse ratio interpolation

图 5 不同插值方法的比较

Fig.5 Comparison of different interpolation algorithm

表 2 两种插值方法的计算时间

Tab.2 Computing time of two interpolation methods

Computing time /s·mm^{-1}	Interpolation algorithm based on polynomial fitting	Interpolation algorithm based on inverse distance ratio method
ds=0.5	1 952.46	383.07
ds=1.0	1 626.36	364.63
ds=2.0	1 542.58	347.27

两种插值方法的计算时间相差不大（基于多项式拟合的插值方法可以通过改变拟合阶数，拟合取

点数等方式加快计算速度),但是,基于多项式拟合的插值方法的精度大的多,稳定性更好,而误差是会随着计算而叠加的,最后可能导致发散,所以综合考虑,采用基于多项式拟合的插值方法结合 Adams 线性多步法进行光线追迹更好。

2 三维弹头气动光学效应计算

文中采用红外成像制导导弹弹头进行数值仿真,其模型示意图如图 6 所示。

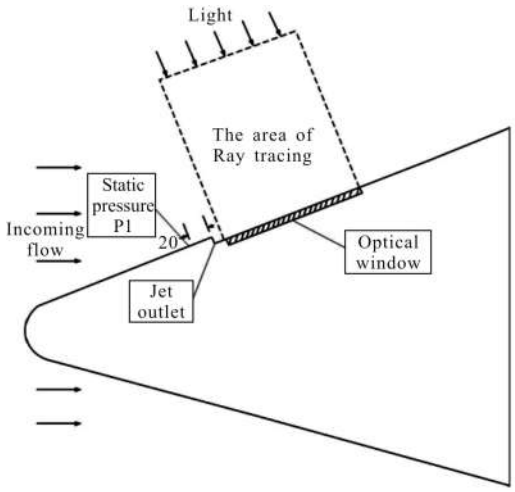


图 6 弹头模型示意图

Fig.6 Schematic diagram of warhead model

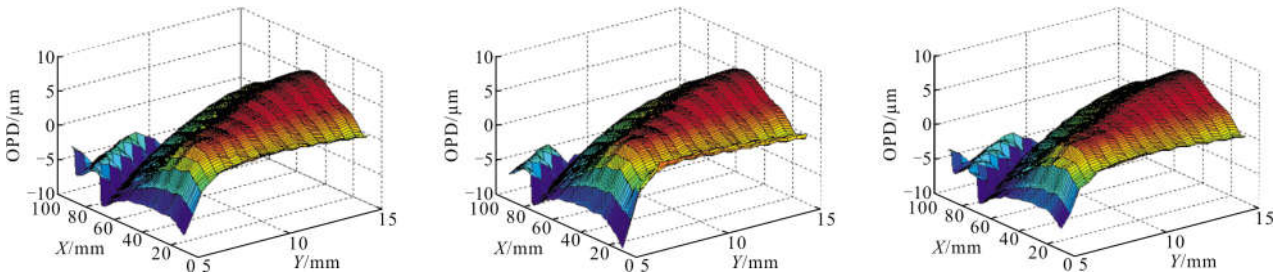
2.1 数值方法

对于流场的模拟,采用基于密度的(耦合)双精度 Fluent 求解器求解二维雷诺平均纳维斯托克方程。利用 SST $k-\omega$ 湍流模型模拟了冷却剂切向注入主流场。采用平流上游分裂法(ausm)通量矢量分裂的二阶空间精确迎风格式(sou),在适当的欠松弛因子下,将 CFL 保持在 0.5,以保证稳定性。使用标准壁函数模拟近壁区域的流动,并假设通道壁的无滑移条件。模型的表面定义为绝热条件。在喷流出口,由于流动是超音速的,流场是自内向外推得。假设空气为理想气体,当残差下降超过三个数量级后达到最小值时,可将解视为收敛。

2.2 计算结果

以导弹在 5 km 高空,马赫数为 7,喷流压力匹配飞行情况为计算实例,把文中三种光线追迹方法用于光学窗口附近流场,结果如图 7 所示。

可以看出,三种方法光线追迹结果(光程差)的整体分布规律基本一致,但在某些部分会很大的差异,比如 Richardson 外推方法光线追迹出的光程差结果在图 7 左上角部分明显比其他两个方法追迹结果偏大。使用 Adams 线性多步法光线追迹所得的光程差和龙格库塔方法的结果还是有明显差异,从图中左上角起始位置便不同,之后整个光程差曲线的变化趋势虽然一致,但某些峰值位置光程差大小也



(a) 四阶 Runge-Kutta 方法光线追迹结果

(a) Ray tracing results of fourth-order Runge-Kutta method

(b) Richardson 外推方法光线追迹结果

(b) Richardson extrapolation method ray tracing results

(c) Adams 线性多步法光线追迹结果

(c) Ray tracing results of Adams linear multistep method

图 7 三维非均匀流场数值仿真结果分布

Fig.7 Distribution of numerical simulation results for 3D non-uniform flow field

有明显差异,虽然 Adams 线性多步法以龙格库塔方法起步,但没有忽略前一步的计算结果,不会带来误差的累积,结果更接近真实解;从表 3 可以看出,Adams 线性多步法也比其他两种方法花费更少时

间,是一种高速方法。

表 3 三种方法计算时间

Tab.3 Computing time of three method

Computing time/s·mm^{-1}	Fourth-order Runge-Kutta method	Richardson extrapolation method	Adams method
ds=0.5	2 586.548	4 834.625	1 953.5

3 结 论

文中首先提出了三种新的四阶精度光线追迹方法,考虑了折射率连续分布的三维螺旋光线情况,进行了方法精度的检验,发现四阶 Runge-Kutta 方法计算速度最快,Adams 线性多步法方法精度最高,相对误差量级在 10^{-11},计算时间基本与四阶 Runge-Kutta 方法相同; 其他两种方法计算的绝对误差在 10^{-8} 量级; 而 Richardson 外推法提高精度的同时花费更多时间,不便于使用;在折射率离散情况下,基于多项式拟合法对三个方向进行插值, 解决了距离反比插值法精度低的问题, 使三种方法在折射率离散分布情况下光线追迹结果精度接近于折射率连续分布情况, 解决了三维非均匀折射率介质场的光线追迹精度低的问题, 并将该方法用于三维弹头光学窗口处流场进行光线追迹, 比较了三种方法的差异, 发现 Adams 线性多步法以龙格库塔方法起步, 但 Admas 方法没有忽略前一步的计算结果, 不会带来误差的累积,所以结果更接近真实解,而 Richardson 外推方法算出的光程差大小与其他两种方法明显不同。

参考文献:

[1] Yin Xingliang. A new subdiscipline of contemporaryoptics-aero-optics[J]. ***China Engineering Science***, 2005, 7(12): 1-6. (in Chinese)

[2] Yin Xingliang. Principle of Aero-optics [M]. Beijing: China Aerospace Publishing House, 2003. (in Chinese)

[3] Rimmer M P. Ray tracing in inhomogeneous media [J]. ***Journal of the Optical Society of America***, 1968, 58(12): 1667-1668.

[4] Liu Chunsheng, Zhang Tianxu, Li Xiaotong, et al. Description of irregular inhomogeneous refractive index field[J]. ***Infrared and Laser Engineering***, 2007, 36(1): 127-130. (in Chinese)

[5] Feng Dinghua. Fine numerical simulation/experimental study on high speed flow and aero-optics application [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2010. (in Chinese)

[6] Kalish S, Lin Z, Kottos T. Light transport in random media with PT-symmetry[J]. ***Physics Optics***, 2012, 85(5): 1-5.

[7] Lin Dainpsang, Tsai Chungyu. Paraxial ray-tracing equations for optical systems containing triangular prisms [J]. ***Journal of the Optical Society of America A***, 2017, 34(3): 361-368.

[8] Lv Meibo, Wang Pei. Ray tracing in Rochon prisms with absorption[J]. ***Optics Express***, 2017, 25(13): 14676-14690.

[9] Wang Yejun, Waruna D Kulatilaka. Optical ray tracing method for simulating beam-steering effects during laser diagnostics in turbulent media [J]. ***Applied Optics***, 2017, 56 (11): 106-115.

[10] Paces Pavel, Yu Wenkai, Klesa Jan. Optical measurement methods for attitude determination of unmanned aerial systems [C]//2018 IEEE/AIAA Digital Avionics Systems Conference, 2018: 23-27.

[11] Si Tongling, Piao Yan, Li Min. Research on collimation of LED naked eye 3D display technology based on ray tracing [J]. ***Infrared and Laser Engineering***, 2018, 47(6): 0603002. (in Chinese)

[12] Liu Wanguo, Hu Hai, Liu Fenghua, et al. Manipulating light trace in a gradientrefractive-index medium: a Lagrangian optics method[J]. ***Optics Express***, 2019, 27(4): 004714.

[13] Zhang Wensheng. Numerical Solution of Differentiale Quations [M]. Beijing: Science Press, 2015. (in Chinese)

[14] Nie Cunyun. Richardson extrapolation method and its generalization [J]. ***Mathematical Theory and Applications***, 2006, 26(2): 15-17. (in Chinese)