

有效介质理论对致密内混合粒子光散射适用性

张小林^{1,2}, 黄印博¹, 饶瑞中¹

- (1. 中国科学院安徽光学精密机械研究所 中国科学院大气成分与光学重点实验室, 安徽 合肥 230031;
2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 利用离散偶极子近似法和 Bruggeman 有效介质理论, 研究了含有黑碳和硫酸盐两种成分的内混合致密气溶胶粒子在尺度参数变化范围为 0.1~25 时的光学特性, 并通过分析比较两种算法计算光学特性的差别研究了有效介质理论对致密内混合粒子光散射的适用性。对单分散系, 有效介质理论在瑞利散射区具有较好的适用性, 能较好地用来近似计算内混合粒子的消光、吸收、散射、后向散射效率因子、不对称因子、消光后向散射比和单次散射反照率, 相对偏差皆在 7% 以内; 而有效介质理论在米散射区的适用性较差, 相对偏差最大可分别达到 25%、88%、66%、5 000%、42%、1 100% 和 47%, 但当内混合体所含的内核较小(体积比 1% 以内)时仍可以近似使用。在粒子尺度参数大于 4 时, 有效介质理论基本上会低估散射效率因子, 却会高估吸收效率因子和不对称因子。而对多分散系, 有效介质理论能近似用来计算各光学参量, 相对偏差在 9% 以内。

关键词: 光散射; 大气气溶胶; 有效介质理论; 内混合

中图分类号: P427 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2014)05-1477-07

Validity of effective medium theory in light scattering of compact internal-mixed particles

Zhang Xiaolin^{1,2}, Huang Yinbo¹, Rao Ruizhong¹

- (1. Key Laboratory of Atmospheric Composition and Optical Radiation, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Optical properties of compact internal-mixed aerosol particles composed of black carbon coated with sulfate were carried out utilizing discrete dipole approximation (DDA) and Bruggeman effective medium theory for the size parameters from 0.1 to 25. The validity of effective medium theory(EMT) in the light scattering of compact internal mixture was performed based on the comparison of both methods. For the monodisperse particles, the EMT does an adequate job of simulating the extinction-, absorption-, scattering-, backscattering-efficiency factors, asymmetry parameters, extinction-to-backscatter ratios and single scattering albedos in Rayleigh scattering region with all the relative differences less than 7%.

收稿日期: 2013-09-12; 修订日期: 2013-10-14

基金项目: 国家自然科学基金(40905009); 973 计划国家重点基础研究发展计划(2013CB955802)

作者简介: 张小林(1982-), 男, 博士生, 主要从事大气气溶胶光学特性方面的研究。Email: xolnzhang@gmail.com

导师简介: 饶瑞中(1963-), 男, 研究员, 博士生导师, 博士, 主要从事激光大气传输、大气光学特性等方面的研究。

Email: rao@aiofm.ac.cn

Nevertheless, the EMT does not do an adequate job in the range of Mie scattering except for the cases that the inclusions of the internal mixture are small enough with the volume percentage less than 1%. Usage of the EMT can mainly lead to significant underestimations of the scattering efficiency factors but overestimations of absorption efficiency factors and asymmetry parameters when the size parameters are more than 4. For the polydisperse particles, the EMT does an adequate job for the optical parameters with the relative differences less than 9%.

Key words: light scattering; aerosol; effective medium theory; internal mixture

0 引言

激光在大气中传输时,气溶胶粒子的吸收、散射效应将直接导致激光能量的衰减,同时吸收效应所产生的非线性热晕效应还会引起光斑畸变和光束偏移等^[1-2]。此外,气溶胶粒子对地球气候、大气环境和人类健康^[3-6]也有着深远影响。亚微米尺度的气溶胶是空气污染物 PM2.5 的主要部分^[7],它们的尺度不太小,不容易被凝结碰并过程所清除;又不太大,不易被雨雪的冲刷作用所清除。这些亚微米尺度的气溶胶粒子悬浮在大气中的生命周期相对较长,甚至能达几周^[8-9]。城市气溶胶通常在体积上会含有约 10% 的黑碳成份^[10],而在严重污染大气中,黑碳甚至会占 PM2.5 质量的 20~50%^[11]。这些黑碳气溶胶通常会被包裹上水、硫酸盐和有机质^[12-13]。

数值模拟是用来研究亚微米尺度气溶胶粒子的物理光学特性的常用方法之一。目前,许多数值算法可以用于计算粒子的光学特性,但对于非均匀粒子光学特性的计算算法却非常有限。有效介质理论将不均匀的内混合粒子近似为相同形状的统一粒子,这是因为均匀粒子的光散射特性计算通常比不均匀粒子容易和快速。例如,许多情形下,随机取向的均匀粒子光散射特性可以利用 T 矩阵以非常低的消耗获得^[14]。然而,任何一种有效介质理论都存在对介电常量比较严重的近似,这些近似往往不能完全符合实际情形,研究其适用性显得很有必要。

文中构建包含硫酸盐和黑碳两种成分的内混合气溶胶粒子模型,再利用离散偶极子近似(DDA)法和有效介质理论分别计算尺度参数为 0.1~25 时的光学特性。通过对比分析两种方法所计算光学特性的差别,研究有效介质理论对致密内混合粒子光散

射的适用性。

1 计算方法

内混合气溶胶粒子模型是由硫酸盐和黑碳两种成分所组成的球体,其中,硫酸盐包裹黑碳,黑碳为球形。假设黑碳的半径为 a ,而整个内混合体半径为 b ,如图 1 所示。DDA 法是将实际的散射物体近似为一系列可极化点阵,从而计算入射光与这些点阵的相互作用。其算法 DDSCAT 在粒子尺度参数 $x=2\pi R/\lambda \leq 25$ 时能得到较为精确的计算结果^[15-18]。整个内混合体模型在计算时由 17 904 个偶极子构成,而取向平均的气溶胶光学特性的各参量,如消光效率因子,是由 54 个目标体取向和 2 个人射光偏振态所平均计算而成。对于实际大气传输过程,由于大量粒子的存在以及单个粒子取向随机,所以方向平均的气溶胶光学特性才是有意义的。硫酸盐和黑碳在波长 0.55 μm 处的复折射率分别为 $1.53 - 1 \times 10^{-7}i$ 和 $1.75 - 0.44i$ ^[19]。

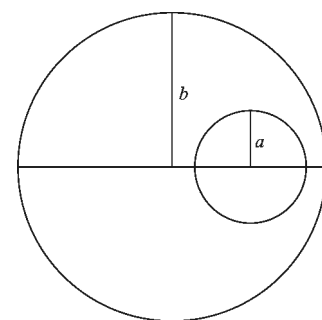


图 1 两成分内混合粒子示意图

Fig.1 Sketch map of two-composition particle in internal mixing state

有效介质理论将不均匀的内混合粒子近似为相同形状的统一粒子,从而方便计算不均匀混合粒子

的光散射特性。一种最常用的有效介质理论是 Bruggeman 理论^[20],其计算公式如公式(1)所示。

$$f_i \frac{\epsilon_i - \epsilon}{\epsilon_i + 2\epsilon} + f_m \frac{\epsilon_m - \epsilon}{\epsilon_m + 2\epsilon} = 0 \quad (1)$$

式中: ϵ 为等效介电常量; ϵ_i 和 ϵ_m 分别为包含物黑碳和基质硫酸盐的介电常量; f_i 和 f_m 分别为黑碳和硫酸盐的体积分数。根据粒子的等效介电常量,即可知道等效折射率,再根据 DDA 即可计算有效介质理论下的气溶胶粒子的各光学量。

当 a/b 分别为 1/2, 1/3, 1/5 和 1/8 时,对内混合体的消光、吸收、散射、后向散射效率因子、不对称因子、消光后向散射比和单次散射反照率进行了数值计算和分析,并重点分析了吸收效率因子,因为气溶胶吸收系数的精确测量到目前为止依然是非常困难的。将 DDA 和 Bruggeman 有效介质理论的计算结果进行对比,以研究有效介质理论对致密内混合体的适用性。其中 DDA 计算时,分别取黑碳位于内混合体的最里和最外以及两者之间共三种情况(a/b 为 1/2 时,黑碳球心距离内混合体球心分别为 0, b/4 和 b/2; a/b 为 1/3 时,黑碳球心距离内混合体球心分别为 0, b/3 和 2b/3; a/b 为 1/5 时,黑碳球心距离内混合体球心分别为 0, 2b/5 和 4b/5; a/b 为 1/2 时,黑碳球心距离内混合体球心分别为 0, b/2 和 7b/8)。

2 结果与讨论

2.1 单分散粒子结果

2.1.1 消光效率因子

定义消光、吸收和散射的无量纲效率因子 $Q(\lambda) = C(\lambda)/\pi a_{\text{eff}}^2$, 其中 $C(\lambda)$ 为消光、吸收或散射截面, a_{eff} 为有效半径。图 2 是四个半径比下,黑碳在内混合体内部三个位置时由 DDA 和有效介质理论分别计算的消光效率因子,以及与有效介质理论计算值相比 DDA 计算值的相对偏差(以下相对偏差定义类似),随尺度参数的变化情况。在瑞利散射区(尺度参数小于 1,下同)内,相对偏差较小,四个半径比下(对应 1/2、1/3、1/5 和 1/8,下同)的值分别在 7%、4%、3%和 3%以内;在米散射区内(尺度参数大于 1,下同),相对偏差较大,四个半径比下的值分别在 25%、14%、10%和 4%以内。在米散射区内,相比其它位置,黑碳在内混合体最靠近边界的位置的相对偏差较小。另外,黑碳越小,相对偏差越小。总体而言,在瑞利散射区,有

效介质理论能较好地得到消光效率因子;而在米散射区,有效介质理论仅对于内部杂质较小时适用消光效率因子。

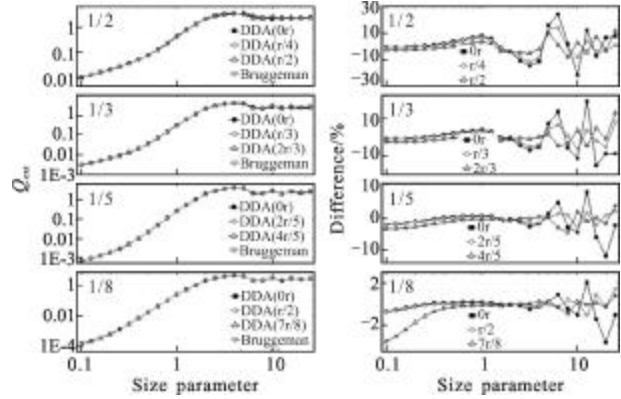


图 2 四个半径比下,四种情形下消光效率因子以及相对偏差随尺度参数的变化

Fig.2 Extinction efficiency factors for four situations and relative differences at four different radius ratios as a function of size parameter

2.1.2 吸收效率因子

图 3 是四个半径比下,由 DDA 和有效介质理论分别计算的吸收效率因子以及相对偏差,随尺度参数的变化情况。在瑞利散射区内,相对偏差较小,四

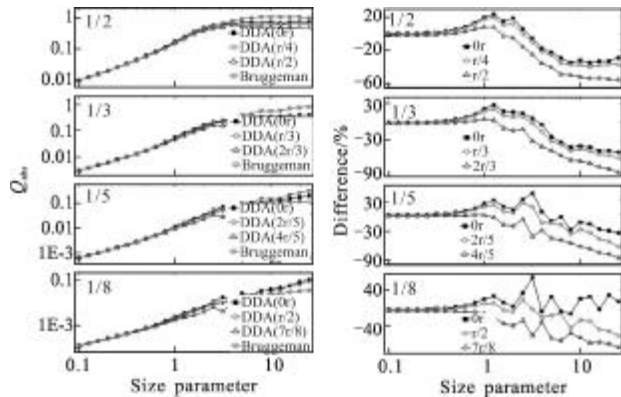


图 3 四个半径比下,四种情形下吸收效率因子以及相对偏差随尺度参数的变化

Fig.3 Absorption efficiency factors for four situations and relative differences at four different radius ratios as a function of size parameter

个半径比下的值分别在 12%、13%、12%和 13%以内;在米散射区内,相对偏差较大,四个半径比下的值分别在 55%、82%、88%和 86%以内。当尺度参数大于 3 时,有效介质理论基本上高估吸收效率因子;

但当黑碳很小 (1/8 半径比)且黑碳位于内混合体球心时,有效介质理论甚至低估了吸收效率因子,这主要是由于黑碳的透镜效应。总之,有效介质理论在瑞利散射区,能近似得到吸收效率因子,而在米散射区会导致较大误差。

2.1.3 散射效率因子

图 4 是四个半径比下,由 DDA 和有效介质理论分别计算的散射效率因子以及相对偏差,随尺度参数的变化情况。散射和消光效率因子变化大体一致,而其相对偏差的变化也大体一致。在瑞利散射区内,相对偏差较小,四个半径比下的值分别在 2%、1%、1%和 1%以内;在米散射区内,相对偏差较大,四个半径比下的值分别在 66%、64%、18%和 4%以内。当尺度参数大于 4 时,有效介质理论大多低估散射效率因子。黑碳越小,相对偏差越小,有效介质理论等效的准确性越高。总之,对于在瑞利散射区,有效介质理论能很好地得到散射效率因子;而在米散射区,有效介质理论仅对于内部杂质较小时适用散射效率因子。

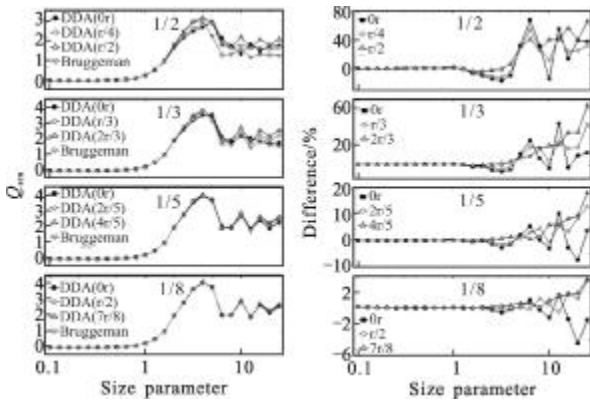


图 4 四个半径比下,四种情形下散射效率因子以及相对偏差随尺度参数的变化

Fig.4 Scattering efficiency factors for four situations and relative differences at four different radius ratios as a function of size parameter

2.1.4 后向散射效率因子

图 5 是四个半径比下,由 DDA 和有效介质理论分别计算的后向散射效率因子以及相对偏差,随尺度参数的变化情况。在瑞利散射区内,相对偏差较小,四个半径比下的值分别在 6%、2%、1%和 1%以内;在米散射区内,相对偏差较大,特别是尺度参数超过 10 时,其值有的甚至超过 1 000%。黑

碳越小,相对偏差越小,有效介质理论等效的准确性相对越高。总体而言,对于后向散射效率因子,有效介质理论在瑞利散射区能很好地适用,而在米散射区,特别是尺度参数超过 10 时,会带来很大的误差。

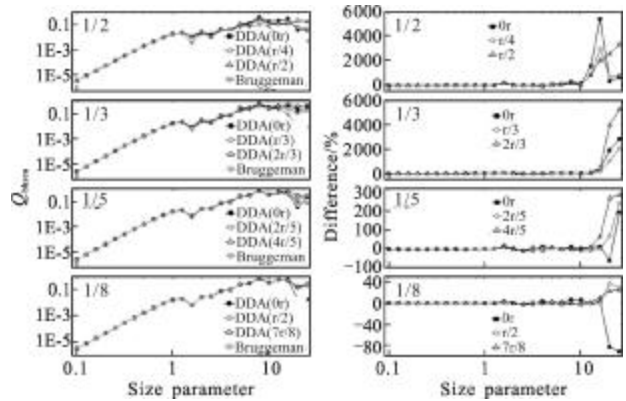


图 5 四个半径比下,四种情形下后向散射效率因子以及相对偏差随尺度参数的变化

Fig.5 Backscattering efficiency factors for four situations and relative differences at four different radius ratios as a function of size parameter

2.1.5 不对称因子

图 6 是四个半径比下,由 DDA 和有效介质理论分别计算的不对称因子以及相对偏差,随尺度参数的变化情况。在瑞利散射区内,相对偏差较小,四个

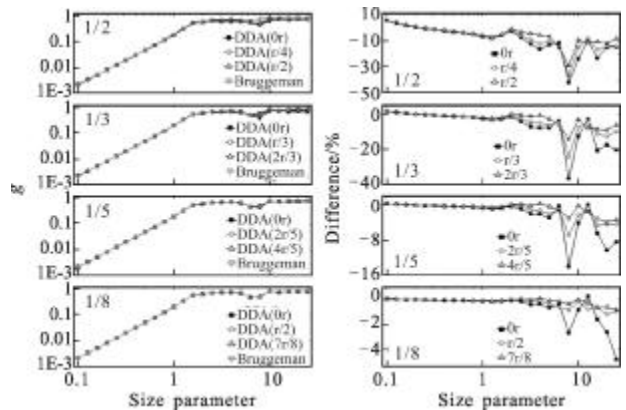


图 6 四个半径比下,四种情形下不对称因子以及相对偏差随尺度参数的变化

Fig.6 Asymmetry parameter for four situations and relative differences at four different radius ratios as a function of size parameter

半径比下的值分别在 7%、2%、1%和 1%以内;在米散射区内,相对偏差较大,四个半径比下的值分别在

42%、37%、14%和 5%以内。在米散射区内,有效介质理论基本高估不对称因子。黑碳越小,有效介质理论适用性越好。总之,对于在瑞利散射区,有效介质理论能很好地得到不对称因子;而在米散射区,有效介质理论仅对于内部杂质较小时适用不对称因子。

2.1.6 消光后向散射比和单次散射反照率

消光后向散射比在雷达方程中决定后向散射系数与消光系数的参数化关系,它是激光雷达反演气溶胶光学厚度中的一个重要参数。图 7 是四个半径比下,由 DDA 和有效介质理论分别计算的消光后向散射比以及相对偏差,随尺度参数的变化情况。在瑞利散射区内,相对偏差较小,四个半径比下的值分别在 3%、2%、3%和 3%以内;在米散射区内,相对偏差较大,四个半径比下的值分别在 97%、98%、142%和 1200%以内。对于消光后向散射比,有效介质理论在瑞利散射区能很好地适用,而在米散射区,会带来较大的误差。

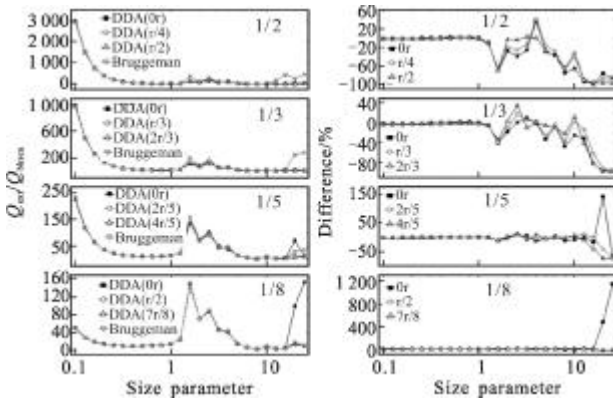


图 7 四个半径比下,四种情形下消光后向散射比以及相对偏差随尺度参数的变化

Fig.7 Extinction-to-backscatter ratios for four situations and relative differences at four different radius ratios as a function of size parameter

单次散射反照率是气溶胶粒子散射效率因子和消光效率因子的比值,表征散射作用的大小,是决定气溶胶对全球和局地气候影响的重要参数。图 8 是四个半径比下,由 DDA 和有效介质理论分别计算的单次散射反照率以及相对偏差,随尺度参数的变化情况。在瑞利散射区内,相对偏差较小,四个半径比下的值分别在 6%、3%、3%和 3%以内;在米散射区内,相对偏差较大,四个半径比下的值分别在 47%、45%、14%和 3%以内。黑碳越小,相对偏差基本越

小,有效介质理论适用性越好。总之,对于单次散射反照率,有效介质理论在瑞利散射区能很好地适用;而在米散射区,有效介质理论仅对于内部杂质较小时适用。

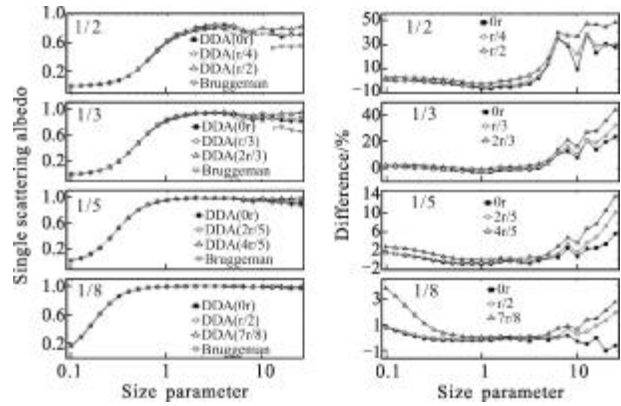


图 8 四个半径比下,四种情形下单次散射反照率以及相对偏差随尺度参数的变化

Fig.8 Single scattering albedos for four situations and relative differences at four different radius ratios as a function of size parameter

2.2 多分散粒子系统结果

对于大气中的光散射问题,在实际应用中遇到的一般是大小和光学性质都不完全相同的粒子群体,这种群体一般称为多分散系。实际能够观测的各种光散射参量是粒子群体中所有粒子散射叠加的共同效果。多分散系内所有尺度的粒子的散射、吸收和消光截面之和就是总的散射、吸收和消光截面。单位体积内所有粒子的总散射、吸收和消光截面就是散射、吸收和消光系数。以一种常见的对数正态分布为例,对四个半径比下,尺度参数为 0.1~25 的各光学量进行积分,结果如表 1 所示。可以看出,各半径比下使用有效介质理论计算消光、散射、吸收、后向散射系数、不对称因子、消光后向散射比和单次散射反照率所带来的相对偏差分别在 3%、2%、9%、8%、4%、6%和 5%以内;黑碳内核越小,有效介质理论越能被用来近似计算各光学量;黑碳离内混合体外界较近时,使用有效介质理论计算消光、散射、吸收、后向散射系数、不对称因子和单次散射反照率所带来的误差相对较小。总体而言,对于多分散粒子体系,有效介质理论能近似用来计算各光学参量,相对偏差在 9%以内。

表 1 多分散对数正态分布的光学参量

Tab.1 Optical parameters for polydisperse particles of log-normal distribution

	σ_{ext}	σ_{sca}	σ_{abs}	g	σ_{bkscat}	$\sigma_{\text{ext}}/\sigma_{\text{bkscat}}$	SSA
0r(1/2)	0.005 95	0.002 48	0.003 46	0.002 8	0.000 14	42.366 34	0.417 53
r/4(1/2)	0.005 91	0.002 5	0.003 42	0.002 81	0.000 139	42.415 2	0.422 15
r/2(1/2)	0.005 79	0.002 53	0.003 26	0.002 82	0.000 138	41.998 14	0.436 98
Bruggeman(1/2)	0.005 78	0.002 54	0.003 24	0.002 92	0.000 129	44.726 06	0.439 41
Maximum deviation(1/2)	3%	2%	6%	4%	8%	6%	5%
0r(1/3)	0.003 54	0.002 47	0.001 08	0.002 83	0.000 131	27.093 33	0.695 79
r/3(1/3)	0.003 53	0.002 47	0.001 06	0.002 84	0.000 13	27.142 99	0.700 2
2r/3(1/3)	0.003 48	0.002 49	0.000 99	0.002 85	0.000 129	26.968 86	0.714 42
Bruggeman(1/3)	0.003 49	0.002 49	0.001	0.002 88	0.000 127	27.584 88	0.712 18
Maximum deviation(1/3)	1%	1%	7%	2%	3%	2%	2%
0r(1/5)	0.002 71	0.002 47	0.000 237	0.002 85	0.000 127	21.290 23	0.912 36
2r/5(1/5)	0.002 7	0.002 47	0.000 231	0.002 85	0.000 127	21.293 88	0.914 37
4r/5(1/5)	0.002 69	0.002 47	0.000 213	0.002 85	0.000 127	21.214 77	0.920 79
Bruggeman(1/5)	0.002 69	0.002 47	0.000 222	0.002 86	0.000 126	21.355 16	0.917 62
Maximum deviation(1/5)	1%	0%	6%	0%	1%	1%	1%
0r(1/8)	0.002 51	0.002 47	0.000 045	0.002 86	0.000 126	19.901 7	0.982 26
r/2(1/8)	0.002 51	0.002 47	0.000 043	0.002 86	0.000 126	19.900 23	0.983 02
7r/8(1/8)	0.002 51	0.002 47	0.000 038	0.002 86	0.000 126	19.870 65	0.984 87
Bruggeman(1/8)	0.002 51	0.002 47	0.000 041	0.002 86	0.000 126	19.909 1	0.983 49
Maximum deviation(1/8)	0%	0%	9%	0%	0%	0%	0%

3 结 论

文中利用离散偶极子近似法和 Bruggeman 有效介质理论研究了被硫酸盐包裹的黑碳内混合气溶胶粒子在尺度参数变化范围为 0.1~25 时的光学特性, 并通过分析两种算法计算光学特性的差别研究了有效介质理论对致密内混合粒子光散射的适用性。结果表明: 对单分散系, 有效介质理论在瑞利散射区具有较好的适用性, 能较好地近似致密内混合粒子的介电常量, 从而用来近似计算粒子的消光、吸收、散射、后向散射效率因子、不对称因子、消光后向散射比和单次散射反照率, 相对偏差皆在 7% 以内; 而有效介质理论在米散射区的适用性较差, 相对偏差最大可分别达到 25%、88%、66%、5 000%、42%、1 100% 和 47%, 除非内混合体所含的杂质较小(体积比 1% 以内)。在粒子尺度参数大于 4 时, 有效介质理论大多会低估散射效率因子, 却基本会高估吸收效率因子和不对称因子。而对多分散系, 有效介质理论能近似用来计算各光学参量, 相对偏差在 9% 以内。

文中在研究有效介质理论对致密内混合粒子光散射的适用性时, 仅选择了具有代表性的尺度参数, 针对更宽范围的尺度参数以及其它气溶胶粒子组分情况下光学特性有待进一步的分析研究。

参考文献:

- [1] Rao Ruizhong. Combined effect of turbulence and thermal blooming of laser propagation in atmosphere [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2006, 35(2): 130-134. (in Chinese) 饶瑞中. 激光大气传输湍流与热晕综合效应[J]. *红外与激光工程*, 2006, 35(2): 130-134.
- [2] Huang Yinbo, Wang Yingjian. Effect of the measurement errors of atmospheric parameters on the laser propagation effects [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2006, 18(5): 720-724. (in Chinese) 黄印博, 王英俭. 激光传输大气参量测量精度要求的数值分析[J]. *强激光与粒子束*, 2006, 18(5): 720-724.
- [3] Haywood J M, Shine K P. Multi-spectral calculations of the direct radiative forcing of tropospheric sulphate and soot aerosols using a column model [J]. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society-Part A*, 1997, 123(543): 1907-

- 1930.
- [4] Kaufman Y J, Koren I, Remer L A, et al. The effect of smoke, dust, and pollution aerosol on shallow cloud development over the Atlantic Ocean [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2005, 102(32): 11207-11212.
- [5] Waggoner A P, Weiss R E, Ahlquist N C, et al. Optical characteristics of atmospheric aerosols [J]. *Atmos Environ*, 1981, 15: 1891-1909.
- [6] Horvath H. Estimation of the average visibility in central Europe[J]. *Atmos Environ*, 1995, 29: 241-246.
- [7] Tuch T, Brand P, Wichmann H E, et al. Variation of particle number and mass concentration in various size ranges of ambient aerosols in eastern Germany [J]. *Atmos Environ*, 1997, 31: 4193-4197.
- [8] Krieger U K, Braun C. Light-scattering intensity fluctuations in single aerosol particles during deliquescence [J]. *J Quant Spectrosc Radiat Transfer*, 2001, 70: 545-554.
- [9] Brewer R, Belzer W. Assessment of metal concentrations in atmospheric particles from Burnaby Lake, British Columbia, Canada[J]. *Atmos Environ*, 2001, 35: 5223-5233.
- [10] Horvath H, Kasahara M, Pesava P. The size distribution and composition of the atmospheric aerosol at a rural and nearby urban location[J]. *J Aerosol Sci*, 1996, 27: 417-35.
- [11] Park S S, Kim Y J, Fung K. Characteristics of PM_{2.5} carbonaceous aerosol in the Sihwa industrial area, South Korea[J]. *Atmos Environ*, 2001, 35: 657-65.
- [12] Moteki N, Kondo Y. Effects of mixing state on black carbon measurement by laser-induced incandescence [J]. *Aerosol Sci Technol*, 2007, 41: 398-417.
- [13] Shiraiwa M, Kondo Y, Moteki N, et al. Evolution of mixing state of black carbon in polluted air from Tokyo[J]. *Geophys Res Lett*, 2007, 34: L16803.
- [14] Mishchenko M I, Hovenier J W, Travis L D. *Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory Measurements, and Applications*[M]. New York: Academic Press, 2000.
- [15] Draine B T, Flatau P J. Discrete-dipole approximation for scattering calculations[J]. *J Opt Soc Am*, 1994, 11: 1491-1499.
- [16] Draine B T, Flatau P J. Discrete dipole approximation for periodic targets: I. theory and tests[J]. *J Opt Soc Am*, 2008, 25: 2693-2703.
- [17] Draine B T, Flatau P J. Fast near-field calculations in the discrete dipole approximation for regular rectilinear grids[J]. *Optics Express*, 2012, 20(2): 1247-1252.
- [18] Draine B T, Flatau P J. User guide for the discrete dipole approximation code DDSCAT 7.2 [EB/OL]. arXiv, <http://arXiv.org/abs/1202.3424>, 2012.
- [19] Fenn R W, Clough S A, Gallery W O, et al. Optical and infrared properties of the atmosphere [Z]//Chapter 18 in *Handbook of Geophysics and the Space Environment*[R]. AS Jursa. MA: Air Force Geophysics Laboratory, Hanscom AFB, 1985.
- [20] Bruggeman D A G. Calculation of various physics constants in heterogeneous substances. I. dielectricity constants and conductivity of mixed bodies from isotropic substances [J]. *Annalen der Physik*, 1935, 24(5): 636-664.