

## 基于微粒群与模拟退火算法的光纤陀螺导航系统动态补偿方法

孟祥涛,王巍,向政

(中国航天电子技术研究院,北京 100094)

**摘要:** 光纤陀螺惯导系统在进行空间自主导航时,需要经历长期复杂的空间环境,这会使惯性仪表的某些性能发生变化,光纤陀螺仪的光功率下降是一种比较典型的失效模式,这会导致光纤陀螺仪的带宽下降,当航天器进行变轨或姿态机动时其导航精度会降低。针对上述问题,文中提出了微粒群优化的光纤陀螺仪动态补偿方法,根据光纤陀螺仪和参考模型在相同输入下的响应,优化得到补偿环节的参数。但微粒群算法存在过早陷入局部最优解的缺陷,为提高算法的全局搜索能力,采用模拟退火算法使其以较大的概率跳出局部最优解。通过光纤陀螺导航系统的动态导航试验验证了该方法能够有效地补偿光纤陀螺仪的动态特性,提高机动条件下的导航精度,具有较强的工程实用价值。

**关键词:** 微粒群算法; 模拟退火; 动态补偿; 光纤陀螺

**中图分类号:** V241.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2014)05-1555-06

## Dynamic compensation of FOG navigation system based on particle swarm optimization and simulated annealing algorithm

Meng Xiangtao, Wang Wei, Xiang Zheng

(China Academy of Aerospace Electronics Technology, Beijing 100094, China)

**Abstract:** When spacecraft moves in the orbit using FOG navigation system, the performance of inertia instrument will fall off after experiencing a long and complicated environment. The power of light source falls off is a kind of fault mode. This mode will induce FOG's bandwidth to decline and the navigation precision will descend when spacecraft transfers to the other orbit or moves to a bigger angle. To resolve this problem, a method to compensate FOG's bandwidth using particle swarm optimization algorithm was brought forward. With this method a dynamic compensator could be realized without knowing the dynamic characteristics of FOG. The parameter of the compensator was optimized according to the measurement data of FOG and the reference model. But sometimes this method ran into local optimization easily. To increase this algorithm's performance, simulated annealing algorithm was induced to avoid local optimization. Finally, dynamic navigation experiment of FOG navigation system show that this algorithm is effective. This method can increase navigation precision when spacecraft moves to a bigger angle and possess a better engineering value.

**Key words:** particle swarm algorithm; simulated annealing; dynamic compensation; FOG

收稿日期:2013-09-17; 修订日期:2013-10-19

基金项目:总装“十二五”预研项目(30106)

作者简介:孟祥涛(1982-),男,博士生,主要从事光纤陀螺惯性姿态测量技术方面的研究。Email:mengxiangtao1982@163.com

导师简介:王巍(1966-),男,中科院院士,研究员,博士生导师,主要从事新型惯性仪表、新型惯性传感与应用方面的研究。

### 0 引言

光纤陀螺惯导系统是确保航天器在轨稳定运行和成功返回的关键单机，当航天器长期在轨运行时需要经历比较复杂的空间环境，如热真空、辐照等，这会使光纤陀螺仪内部的光学器件发生性能上的变化，光源光功率下降是在上述环境工作时典型的失效模式。光源光功率下降会使陀螺仪的带宽下降，从而使导航系统的动态特性发生变化。对于返回式航天器，在轨运行任务结束后需要返回地面，该过程需要进行多次变轨和较大的姿态机动，这就需要光纤陀螺导航系统具有较高的动态跟踪特性。

光纤陀螺仪带宽发生变化会使航天器返回过程中的导航精度下降。因此，减小动态误差，获得精确、可靠的导航参数是动态补偿需要解决的重要问题之一。目前针对动态补偿的设计方法主要有：(1) 反卷积法。如果传感器脉冲响应是已知的，该方法能够通过一个反卷积恢复被测信号。(2) 零极点方法。用低阶微分方程表示传感器的动态特性，通过补偿环节抵消传感器传递函数的零极点，从而改善传感器的动态特性，最终实现动态补偿。(3) 预测法，根据传感器动态特性的数学模型推算输入信号。

上述这些方法均基于传感器的动态数学模型设计补偿环节，而在确定数学模型的过程中为避免建模带来的复杂性，会作一些简化和假设，这样建模的结果与传感器的实际动态特性之间会存在一些差异，从而引入新的动态测量误差。因此，在进行传感器的动态补偿时，按照传感器的实际特性设计动态补偿器，避免不准确的模型影响动态补偿效果是工程化过程中提高补偿精度的重要研究内容。

文中提出基于微粒群算法的光纤陀螺仪动态误差补偿方法，该方法无需已知光纤陀螺仪准确的数学模型，根据光纤陀螺仪和参考模型在相同激励下的响应数据，通过优化学习得到补偿器的参数。但是，微粒群算法存在过早收敛至局部最优值的缺陷，针对该问题提出采用模拟退火算法处理微粒群中的个体，提高了算法的全局搜索能力。该方法综合了微粒群算法和模拟退火算法的优点，二者相辅相成，实现了光纤陀螺仪的动态补偿，提高了动态导航精度。

### 1 光纤陀螺仪的动态特性

目前工程化应用的光纤陀螺均采用全数字闭环保偏的方案，闭环方案可以消除各中间变换环节的漂移及非线性等影响，光纤陀螺原理框图如图 1 所示。

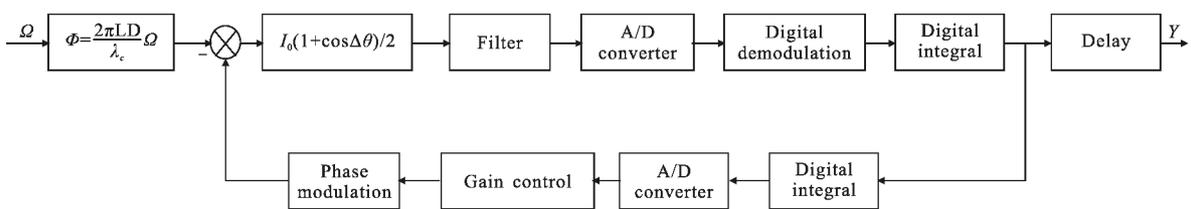


图 1 闭环光纤陀螺仪的方框图

Fig.1 Diagram of close-loop fiber optic gyroscope

对上述系统框图进一步简化，可得光纤陀螺的简化模型，如图 2 所示，闭环光纤陀螺传递函数可近似表示为：

$$H(s) = \frac{1}{M} \frac{1}{Ts+1} e^{-\tau s} \quad (1)$$

式中： $T = \frac{1}{GM}$  为系统的时间常数； $\tau$  为系统的纯延迟时间； $G$  为信号前向通道增益，取决于光源波长、光纤长度、光纤环直径、光源输出光功率、光路损耗、探测器响应度与跨阻抗、前放增益、A/D 转换系数、数字解调增益等参数； $M$  为反馈回路增益，取决于数字

相位台阶的反馈增益、D/A 转换系数、相位调制器调制系数等参数。

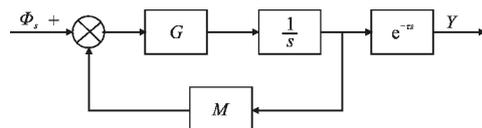


图 2 光纤陀螺仪简化方框图

Fig.2 Compact model of fiber optic gyroscope

可以得到光纤陀螺的幅频特性、相频特性以及动态响应频带。

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{M} \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} \quad (2)$$

$$\angle F(j\omega) = \arctan(\omega T) \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{2\pi T} \quad (4)$$

由此可知, 决定陀螺带宽指标的主要因素是信号前向通道增益  $G$  和反馈回路增益  $M$ 。信号前向通道增益  $G$  与光源光功率成正比, 光纤陀螺导航系统在长期空间环境下工作会存在光功率下降的可能, 这就会导致系统的带宽下降, 影响系统的动态特性。

## 2 基于微粒群算法的动态补偿原理

### 2.1 动态补偿的基本原理

导致光纤陀螺动态误差的原因是其带宽不够, 不能够覆盖瞬变信号中包含的所有频率分量, 而使部分高频分量受到不同程度的衰减。所以, 需要进行动态补偿, 提高动态特性。文中采用自适应控制的基本思想<sup>[1]</sup>, 在光纤陀螺输出信号的后端串联一个补偿环节, 提高光纤陀螺信号识别与处理的能力, 动态补偿的基本原理如图 3 所示。

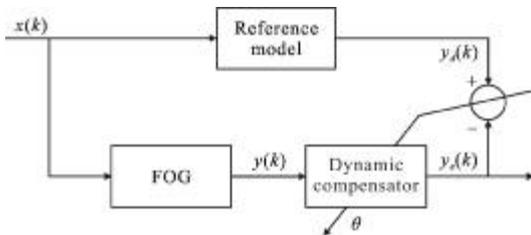


图 3 补偿器参数辨识原理

Fig.3 Parameters identification of compensate network

设计补偿环节的传递函数为差分方程形式:

$$H(Z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_m Z^{-m}}{1 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_n Z^{-n}} \quad (5)$$

其中, 补偿器的参数为:

$$\theta = (b_1, b_2, \dots, b_m, a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (6)$$

式中:  $m$  为补偿前光纤陀螺动态模型的阶次, 为补偿后光纤陀螺动态模型的阶次。如果将光纤陀螺与补偿环节等效成一个新的传递网络, 则动态补偿的最终结果就是改变光纤陀螺原有的输出特性。

参考模型可以选择带宽没有发生变化的陀螺仪, 两只陀螺需要输入相同的动态信号激励, 补偿器参数  $\theta$  需要根据补偿环节输出与带宽无变化陀螺输出之间的差异不断修正, 这样补偿环节的设计成为

一个对  $L(L=m+n)$  维参数  $\theta$  的最优化过程, 即

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} |y_d(k) - y_e(k)| \rightarrow \min \quad (7)$$

### 2.2 标准的微粒群算法

微粒群优化算法是一种进化计算技术, 是一种基于叠代的优化工具。在算法中, 微粒在超微搜索空间飞行, 假设一个微粒群有  $N$  个微粒, 每个微粒代表  $L$  维搜索空间中的一个解, 其中第  $i$  个微粒的空间位置为  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iL})$ ; 第  $i$  个微粒所经历的最优位置称为其个体历史最优位置  $p_i$ , 同时, 每个微粒还具有各自的飞行速度  $v_i$ 。所有微粒经历过的最优位置称为全局最优位置  $p_g$ 。不失一般性, 以最小化问题  $f(x)$  为例, 标准微粒群算法可以用下式描述:

$$v_i(k+1) = wv_i(k) + c_1 r_1 (p_i - x_i(k)) + c_2 r_2 (p_g - x_i(k)) \quad (8)$$

$$x_i(k+1) = x_i(k) + v_i(k+1) \quad (9)$$

$$p_i(k+1) = \begin{cases} x_i(k+1), & f(x_i(k+1)) < f(p_i(k)) \\ p_i(k), & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

$$p_g(k+1) = \begin{cases} p_i(k+1), & f(p_i(k+1)) < f(p_g(k)) \\ p_g(k), & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

参数  $w$  取较大值时有利于算法在较大范围内搜索, 而取较小值时有利于算法在局部进行精细的开采,  $c_1$  和  $c_2$  分别是学习认知因子和社会认知因子, 一般情况下取值在区间  $[0, 2]$ ,  $r_1, r_2$  是两个服从  $U(0, 1)$  分布的相互独立的随机变量, 具体到算法的速度更新由三部分组成:

(1)  $v_i(k)$  为微粒先前的飞行公式, 又称微粒动能, 表明微粒在搜索空间中移动的能力, 其值越大, 越有利于全局搜索, 其值越小, 越有利于局部搜索, 可以通过参数加以控制;

(2)  $c_1 r_1 (p_i - x_i(k))$  为学习认知部分, 表明微粒自身经验对当前搜索倾向的线性吸引程度, 并受  $c_1 r_1$  的随机调整, 是对微粒所积累经验的利用;

(3)  $c_2 r_2 (p_g - x_i(k))$  为社会认知部分, 表示微粒学习其他微粒经验的过程, 也是一种线性吸引, 体现了微粒间信息的共享与社会协作,  $p_g$  的定义与种群拓扑结构直接相关。

微粒群算法结构简单, 易于实现, 但是该算法存在两个缺点: 其一是粒子群优化算法的收敛速度比较慢, 其二是粒子群优化算法容易陷入局部极值点, 导致得不到全局最优解。为改善粒子群优化算法的不足, 将其与模拟退火算法结合起来, 保证算法的全

局收敛性,加快算法的收敛速度,克服早熟的问题。

### 3 结合模拟退火算法的补偿器参数估计

模拟退火算法是基于金属退火的机理建立起的一种全局搜索方法,该方法能够在概率意义上实现目标函数的最优<sup>[2]</sup>。模拟退火算法结合微粒群算法在寻找极值的过程中可以按照一定的概率接受恶化解,允许目标函数在有限范围内变坏,从而按照一定的概率跳出局部最优解,最终使算法向全局最优值方向收敛。当温度较高时,算法接受恶化解的概率大,随着温度的降低,算法接受恶化解的概率逐渐减小,这样便于算法跳离局部极值的束缚而最终找到全局最优解<sup>[3]</sup>。模拟退火算法的构成要素如下。

(1) 能量函数:需要优化的目标函数,该函数存在最小解,该解即为问题的最终结果;

(2) 搜索空间:也称为状态空间,所有可行解的集合组成搜索空间,每一个状态代表一个可行解;

(3) 冷却进度表:是指由高温状态向低温状态冷却过程的函数管理表。假设时刻  $k$  的温度用  $T(k)$  表示,模拟退火算法的温度函数表达为:

$$T(k) = \frac{T_0}{\lg(1+k)} \tag{12}$$

(4) 状态转移规则:是指从一个状态向另一个状态转移的概率,与当前的温度有关。

在进行参数寻优的过程中,群体中各微粒的位置和速度进化方程与基本的微粒群算法一致,而  $p_i$  的更新采用下面的公式:

$$p_i(k+1) = \begin{cases} x_i(k+1), \min\left(1, \exp\left(-\frac{f(x_i(k+1)) - f(p_i(k))}{T(k+1)}\right)\right) > r \\ p_i(k), \text{其他} \end{cases} \tag{13}$$

结合模拟退火的微粒群算法的主要步骤可以描述如下:

- (1) 按照随机数据产生的规则产生初始状态,以该初始状态作为最优状态,同时计算目标函数值;
- (2) 将初始温度和循环计数值传递给相应的变量,即  $T_0 \rightarrow \theta$  和  $1 \rightarrow k$ ;
- (3) 在当前最优点的基础上产生一个新的状态,同时计算目标函数值,并计算目标函数值的增量  $\Delta$ ;
- (4) 如果  $\Delta < 0$  则认定新产生的状态为当前最优状态,如果  $\Delta \geq 0$  则以概率  $p = \exp(-\Delta/\theta)$  接受新状态为当前最优状态;
- (5) 如果搜索次数未达到预定的次数,转向(3),否则  $k+1 \rightarrow k$ ;
- (6) 如果温度未冷

却到设定值,则  $T(k) \rightarrow \theta$ ,转向(3),如果已冷却到设定值,则输出当前最优点,计算结束。

### 4 光纤陀螺导航系统实测数据分析

为了验证模拟退火算法协同微粒群算法能够对光纤陀螺的动态特性实施有效的补偿,开展了试验验证。试验采用某空间型号的光纤陀螺导航系统,该产品采用三只光纤陀螺仪和三只加速度计作为惯性敏感部件,三只陀螺仪和三只加速度计均采用 3S 构型,即仪表的三个敏感轴分布在以本体轴为中心的锥面上,三个敏感轴与本体轴的角度相等,均为  $55^\circ 44' 08''$ 。

#### 4.1 输入信号的选择

光纤陀螺导航系统中有一只陀螺仪光源的光功率下降使其自身的带宽下降,这就会导致系统的动态特性变差。光纤陀螺的数学模型可以等效为一阶惯性环节与纯延迟环节相乘,一阶惯性环节在跟踪加速度信号时,存在稳态误差,稳态误差与加速度和系统增益成正比,而与陀螺仪的带宽成反比。当系统中一个陀螺仪的带宽下降时,在进行加速或减速的过程中,该陀螺会出现输出滞后的现象,图 4 给出了当光纤陀螺导航系统绕本体轴以  $20^\circ/s^2$  的加速度加速至  $20^\circ/s$  时三只陀螺仪的输出,另外也给出了速度稳定在  $20^\circ/s$  时三只陀螺仪的输出。

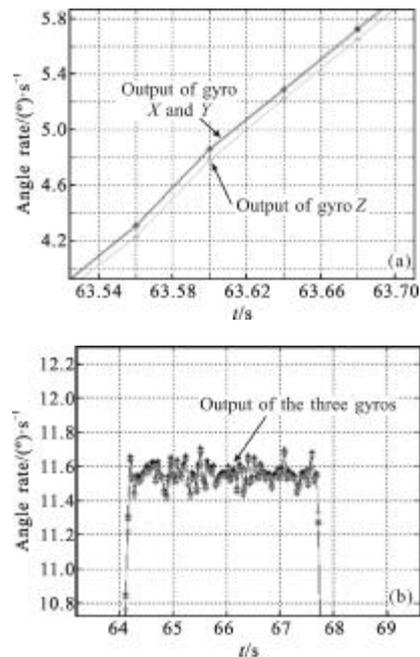


图 4 系统加速过程中三只陀螺仪的输出  
Fig.4 Output of the three gyros in acceleration

由此可知, 光纤陀螺仪的带宽下降会导致其动态特性发生变化, 相比于其他两只陀螺, 在加速过程中其输出比其他两个轴相差约  $0.07(^{\circ})/s$ , 而匀速阶段没有明显的差异。当将三个陀螺仪的输出转换至水平坐标系下, 其输出曲线如图 5 所示。

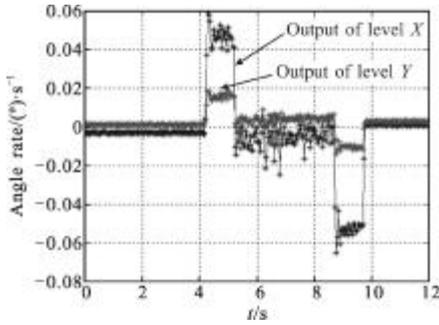


图 5 水平坐标系下的角速度输出

Fig.5 Output of the three gyros in horizontal axes

从上图可以看出, 当绕本体轴加速转动的过程中, 由于一个陀螺仪的稳态误差较大, 会导致转换到本体系下的两个水平轴出现耦合分量。而一阶惯性环节在响应阶跃信号时没有稳态误差, 因此陀螺仪的稳态输出是正常的, 此时当航天器在轨稳定运行时其导航精度可以保证, 但如果进行姿态机动就会导致导航误差增大。

在采用微粒群和模拟退火协同算法对光纤陀螺进行动态补偿时, 需要采用加速度斜坡信号作为输入。

#### 4.2 参考模型的选择

当航天器在轨运行的过程中, 采用微粒群和模拟退火协同算法对光纤陀螺进行动态补偿时, 需要选择合适的参考模型<sup>[4]</sup>。目前大多数航天器的姿态敏感器中陀螺的带宽比较高, 选用其他的姿态敏感器无法作为动态补偿的参考模型。为了比较方便并且能够可靠地实现动态补偿的目的, 当光纤陀螺导航系统中通道 3 陀螺仪的带宽下降时, 可以选择另外通道 1 陀螺仪作为参考模型, 此时需要航天器绕导航系统的本体轴进行姿态机动, 这样外界的输入对三个陀螺仪的激励是一致的。

#### 4.3 补偿环节的辨识

光纤陀螺仪的传递函数可以等效为一阶惯性环节与纯延迟环节的乘积, 对于三个光纤陀螺其纯延迟时间可以通过设计的一致性来保证<sup>[5]</sup>。对一阶惯性环节进行离散化可以得到一阶差分传递函数, 补偿

环节的脉冲传递函数为:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (14)$$

这样, 补偿环节的参数  $\theta = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ a_1 \ a_2]$ , 在光纤陀螺导航系统的本体轴上采用加速度信号作为输入, 激励三只光纤陀螺仪的输出, 将通道 1 陀螺仪的输出作为理想输出, 通道 3 陀螺仪的输出作为补偿环节的输入, 采用模拟退火和微粒群协同算法对补偿环节进行离线辨识, 使公式(10)成立。

#### 4.4 结果分析

通过模拟退火和微粒群算法得到补偿环节的参数  $\theta = [1.243 \ 3, 1.693 \ 7, 0.450 \ 4, 1.693 \ 7, 0.693 \ 7]$ , 脉冲响应传递函数为:

$$G(z) = \frac{1.243 \ 3 + 1.693 \ 7z^{-1} + 0.450 \ 4z^{-2}}{1 + 1.693 \ 7z^{-1} + 0.693 \ 7z^{-2}} \quad (15)$$

通道 3 陀螺仪的输出经过动态补偿后能够提高陀螺仪的带宽, 可以实时跟踪外界输入的角速度, 尤其是在机动条件下的输入。为此同样绕导航系统的本体轴以  $20(^{\circ})/s^2$  的加速度加速至  $20(^{\circ})/s$ , 采集三只陀螺仪的输出, 输出曲线如图 6 所示。

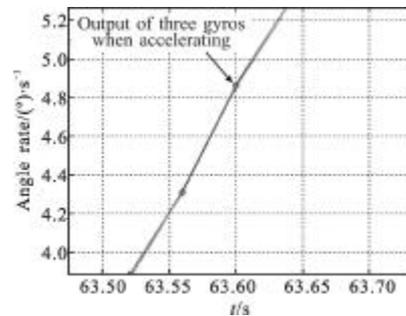


图 6 补偿后三只陀螺仪加速过程的输出

Fig.6 Output of gyros when accelerating after compensation

由此可知, 经过动态补偿后的陀螺仪在加速和匀速阶段较其余两只陀螺均没有明显的差异, 测量的角速度最大相差约  $0.005 \ 2(^{\circ})/s$ , 动态特性得到了有效的提升和补偿。

为了进一步验证动态补偿的有效性, 开展了动态导航试验, 针对动态补偿前后的导航系统进行精度对比。光纤陀螺导航系统安装在三轴转台上, 转台的中框进行频率为  $1.5 \text{ Hz}$ , 幅度为  $1.5^{\circ}$  的摇摆, 内框进行往复运动, 补偿前后的导航误差如表 1 所示。

由此可知, 采用模拟退火和微粒群协同算法对带宽下降的陀螺仪进行动态补偿后, 能够有效地提

高惯性仪表的动态特性,提高了动态跟踪性能<sup>[10]</sup>。从动态导航试验结果可以看出,经过动态补偿后的导航系统在性能上得到了明显的改善,导航精度得到了提高。

表 1 动态补偿前后的导航精度对比

Tab.1 Contrast of navigation precision before and after dynamic compensation

State	Se- quence number	Error of attitude/(°)			Error of position/km		
		Head	Pitch	Roll	North	East	Altitude
Before compen- sation	1	0.672	0.193	-0.622	71.304	7.414	4.642
	2	0.723	0.267	-0.477	67.448	6.573	7.815
After compen- sation	1	0.030	-0.010	-0.061	-1.906	0.550	2.150
	2	0.021	-0.013	-0.064	-1.450	0.379	2.500

## 5 结 论

文中针对光纤陀螺导航系统在轨长期运行过程中出现光源光功率下降导致带宽发生变化的问题,为确保航天器进行姿态机动或自主返回过程中的导航精度,提出了一种微粒群和模拟退火优化的陀螺仪动态误差补偿方法,该方法无需已知陀螺仪的动态特性,通过陀螺仪和参考模型在输入激励下的数据,优化学习得到补偿环节的参数。为验证该方法的有效性,开展了动态导航试验,对比了动态补偿前后的导航结果,从实测数据可知,采用模拟退火和微粒群协同算法能够对动态补偿环节进行最优估计,可以有效地提高动态导航精度,为在轨航天器综合性能的提升提供了新手段和新方法。

## 参考文献:

- [1] Liu Qing. Model reference and particle swarm optimization algorithm based on an approach for sensor dynamic measurement [J]. Acta Metrologica Sinica, 2007, 28 (2): 154-157. (in Chinese)  
刘清. 基于模型参考和微粒群算法优化的传感器动态补偿方法[J]. 计量学报, 2007, 28(2): 154-157.
- [2] Wang Hui. Novel multi-population particle swarm optimizer [J]. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(35): 45-48. (in Chinese)  
王辉. 一种新型的多种群微粒群算法[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(35): 45-48.
- [3] Poli R, Kennedy J, Blackwell T. Particle swarm optimization: an overview[J]. Swarm Intelligence, 2007, (1): 33-57.
- [4] Chatterjee A, Siarry P. Nonlinear inertia weight variation for dynamic adaptation in particle swarm optimization [J]. Computers & Operations Research, 2006, 33: 859-871.
- [5] Li Junjun, Xiao Jianmei, Wang Xihuai. Elitist annealing particle swarm optimization algorithm [J]. Control and Decision, 2008, 23(7): 756-761. (in Chinese)  
李军军, 肖健梅, 王锡淮. 一种精英退火微粒群算法[J]. 控制与决策, 2008, 23(7): 756-761.
- [6] Dong Hw a Kim, Jae Hoon Cho. Intelligent control of AVR system using GA -BF [C]//Lecture Notes in Computer Science Proc of Springer, 2005: 854-859.
- [7] Xie Liping, Zeng Jianchao. The performance analysis of artificial physics optimization algorithm driven by different virtual forces[J]. ICIC Express Letters, 2010, 1(4): 239-244.
- [8] Lin Lingjuan, Liu Xiyu. Rapid partical swarm optimization combined simulated annealing algorithm [J]. Computer Engineering and Applications, 2011, 47(8): 27-29. (in Chinese)  
林令娟, 刘希玉. 结合 SA 算法的快速微粒群优化算法[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(8): 27-29.
- [9] Zhou Xiancheng, Shen Quntai. Research of image restoration algorithm based on particle swarm optimization and simulated annealing [J]. Microelectronics & Computer, 2009, 26(1): 159-165. (in Chinese)  
周鲜成, 申群太. 基于微粒群和模拟退火的图像恢复研究[J]. 微电子学与计算机, 2009, 26(1): 159-165.
- [10] Mo Simin, Zeng Jianchao, Xie Liping. Extended particle - swarm optimization algorithm [J]. Control Theory & Applications, 2012, 29(6): 811-816. (in Chinese)  
莫思敏, 曾建潮, 谢丽萍. 扩展的微粒群算法[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(6): 811-816.
- [11] Niu Ben, Zhu Yunlong, He Xiaoxian, et al. An improved particle swarm optimization based on bacterial chemotaxis[C] //Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation: IEEE, 2006: 3193-3197.
- [12] Shelokar P S, Siarry P, Jayaraman V K, et al. Particle swarm and ant colony algorithms hybridized for improved continuous optimization [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188: 129-142.