

激光辐照飞行靶三维温度场数值模拟

张东来¹, 李小将^{1,2}, 杨业伟¹

(1. 中国人民解放军装备学院 研究生管理大队, 北京 101416;

2. 中国人民解放军装备学院 激光推进及其应用国家重点实验室, 北京 101416)

摘要: 以地基激光辐照飞行靶为研究背景, 建立激光迎面辐照和横向辐照靶目标两种交汇场景, 考虑激光辐照面域和功率密度分布随靶目标飞行的变化, 求解激光辐照参数, 建立热传导模型; 利用有限容积法, 得到飞行靶三维温度场的数值解, 分析目标运动性对温度场分布的影响。不同于激光辐照静止目标, 辐照参数变化对温度场分布有较大的影响: 随着靶目标的飞行, 辐照面积逐渐减小, 平均功率密度逐渐增加, 目标温升速率不断增加; 光束与靶目标夹角的变化, 引起光束强度空间分布的变化, 从而影响温升区域的变化。

关键词: 激光辐照; 飞行靶; 热传导; 温度场; 有限容积法

中图分类号: TN249 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2014)09-2883-06

Numerical simulation of three-dimensional temperature field of flying target irradiated by laser

Zhang Donglai¹, Li Xiaojiang^{1,2}, Yang Yewei¹

(1. Department of Graduate Management, Equipment Academy of PLA, Beijing 101416, China;

2. State Key Laboratory of Laser Propulsion & Application, Equipment Academy of PLA, Beijing 101416, China)

Abstract: Taking ground-based laser irradiating flying target as the background, the encounter scenes were established which included head on irradiating scene and transverse irradiating scene. Considering the varying of irradiating area and power destiny distributing, the laser irradiating parameters were solved, and the heat conduction model was established. The numerical simulation of three-dimensional temperature field of flying target was calculated by the finite volume method. The influence of target moving on temperature field was analyzed. Different from laser irradiating stationary target, the varying of irradiating parameters has a great influence on temperature field distribution. As the target moving, the values of irradiating area decrease gradually, and the values of average power density and the rate of temperature rising increase gradually. The spacial profile of laser beam and temperature rising area are different because of the difference of angle between laser beam and target.

Key words: laser irradiating; flying target; heat conduction; temperature field; finite volume method

收稿日期: 2014-01-11; 修订日期: 2014-02-13

基金项目: 激光推进及其应用国家重点实验室基础研究项目

作者简介: 张东来(1987-), 男, 博士生, 主要从事武器系统运用与分析方面的研究。Email: zd1871128@163.com

导师简介: 李小将(1973-), 男, 教授, 博士生导师, 博士, 主要从事武器系统运用与分析方面的研究。Email: ftq_lxj@163.com

0 引言

国内外对激光与靶目标的相互作用进行了相关的理论和实验研究。美国劳伦斯·利弗莫尔国家实验室(Lawrence Livermore National Laboratory, LLNL)的 C. D. Boley 基于激光与物质的相互作用原理,建立了高能激光对圆柱体迫击炮弹的辐照作用模型^[1-2];焦路光等人求解了激光辐照圆柱形金属/炸药结构的温度场分布,分析了激光参数对炸药热起爆的影响^[3-4];王伟平等利用脉冲激光器辐照金属/炸药材料,将实验结果和理论模型进行对比,分析产生的现象和点火时间^[5]。参考文献中建立都是实验室环境下的理论模型,主要用来研究激光对静止物质的辐照效应。然而,激光辐照运动目标情形中,辐照参数随靶目标运动不断变化,由此产生的影响尚未考虑。以地基激光辐照水平匀速飞行的圆柱体靶为研究背景,设定地基激光迎面辐照靶目标和横向辐照靶目标的交汇场景;进一步求解辐照面域、功率密度分布等激光辐照参数,建立激光辐照模型,包括三维柱坐标下的瞬态热传导方程,及其边界条件和初始条件;设定仿真条件,采用有限容积法数值求解靶目标的温度场分布;分析运动目标辐照参数特性对激光辐照温度场的影响。模型及求解结果为进一步研究激光对运动目标的毁伤效应奠定了模型和数据基础。

1 激光辐照交汇场景

地基激光辐照水平匀速飞行的圆柱体靶目标是一种典型的激光辐照运动目标的场景。其中包括迎面辐照飞行靶场景和横向辐照飞行靶场景,分别如图 1(a)和 1(b)所示。

设定激光器和靶目标的参数:

(1) 激光器为连续波氟化氙化学激光器,发射功率为 P_0 ,其波长为 $3.8 \mu\text{m}$,激光波段处于 $3\sim 5 \mu\text{m}$ 的大气窗口,具有很高的大气透过率^[6];

(2) 圆柱体飞行靶长度为 d ,底面半径为 R_1 ;

(3) 靶目标水平匀速飞行,飞行速率为 V_0 ,轴线与轨道重合。

对迎面辐照飞行靶场景进一步做如下设定:

(1) 建立全局直角坐标系 $O_1-X_1Y_1Z_1$ 和与靶目标固联的局部直角坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$;

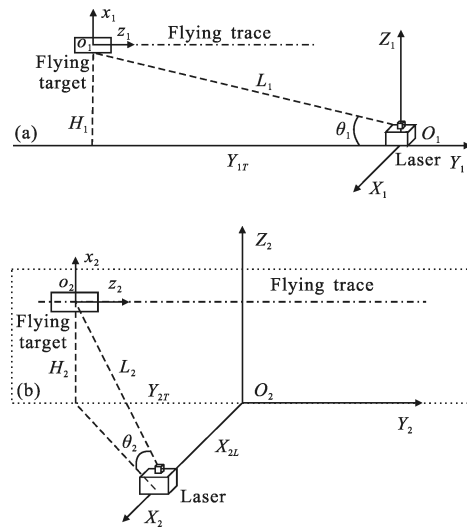


图 1 激光辐照飞行靶交汇场景

Fig.1 Encounter scenes of laser irradiating flying target

(2) 激光器位于坐标系 $O_1-X_1Y_1Z_1$ 原点,靶目标质心的运动轨迹位于 $Y_1O_1Z_1$ 平面;

(3) 激光辐照位置为圆柱体的侧面,辐照中心点位于底部半圆柱体侧面中心,在 $o_1-x_1y_1z_1$ 坐标系的坐标为 $(-R_1, 0, 0)$;

(4) 靶目标飞行高度为定值 H_1 ,飞行方向沿 O_1Y_1 轴正方向,激光束与水平面夹角为变量,辐照初始时刻坐标为 $(0, -Y_{1r}, H_1)$ 。

对横向辐照飞行靶场景进一步做如下设定:

(1) 建立全局直角坐标系 $O_2-X_2Y_2Z_2$ 和与靶目标固联的局部直角坐标系 $o_2-x_2y_2z_2$;

(2) 激光器的坐标为 $(X_{2L}, 0, 0)$,靶目标质心的运动轨迹位于 $Y_2O_2Z_2$ 平面;

(3) 激光辐照位置为圆柱体的圆柱体侧面,辐照中心点位于半圆柱体侧面中心,在 $o_2-x_2y_2z_2$ 坐标系的坐标为 $(0, -R_1, 0)$;

(4) 靶目标飞行高度为定值 H_2 ,飞行方向沿 O_2Y_2 轴正方向,激光束与水平面夹角为变量 θ_2 ,辐照初始时刻坐标为 $(0, -Y_{2r}, H_2)$ 。

2 激光辐照模型

激光辐照飞行靶是激光器发射高能激光束传输能量,作用在靶目标上,进而产生相应的辐照效应。考虑不同场景中激光辐照飞行靶的环境因素,求解激光辐照参数,建立靶目标激光辐照模型,包括三维瞬态热传导方程及其初始条件和边界条件。

2.1 辐照参数

(1) 辐照场景参数

迎面辐照飞行靶情形中,易得激光传输距离 L_1 随靶目标飞行时间 t 的变化为:

$$L_1 = \sqrt{H_1^2 + (Y_{1T} - V_0 t)^2} \quad (1)$$

激光束与靶目标 o_1z_1 轴的夹角 α_1 , 即为激光束与水平面夹角 θ_1 , 可以求得:

$$\alpha_1 = \theta_1 = \arcsin\left(\frac{H_1}{L_1}\right) \quad (2)$$

横向辐照飞行靶情形中,激光传输距离 L_2 随靶目标飞行时间 t 的变化为:

$$L_2 = \sqrt{H_2^2 + X_{2L}^2 (Y_{2T} - V_0 t)^2} \quad (3)$$

确定激光束与靶目标的相对位置,即确定激光束与靶目标 o_2x_2 轴的夹角 α_{1x} 以及和激光束与靶目标 o_2z_2 轴的夹角 α_{1z} 。在坐标系 $O_2-X_2Y_2Z_2$ 中,通过求解向量之间的夹角可得:

$$\alpha_{1x} = \arccos\left(\frac{H_2}{L_2}\right) \quad (4)$$

$$\alpha_{1z} = \arccos\left(\frac{V_0 t - Y_{2T}}{L_2}\right) \quad (5)$$

(2) 激光辐照面域

由激光光束性质可知,激光束在大气中传输的距离为 L 时,光斑半径 a 可近似为^[7]:

$$a = L \cdot \phi \quad (6)$$

式中: ϕ 为光束发散角,受光束衍射发散角 ϕ_y 、大气抖动引起的扩散角 ϕ_r 和激光光源抖动角 ϕ_d 的综合影响。光束发散角可以表述为:

$$\phi = (\phi_y^2 + \phi_r^2 + \phi_d^2)^{1/2} \quad (7)$$

式中:光束衍射发散角和激光光源抖动角是由激光器自身参数决定;大气抖动扩散角是由大气条件决定。

进一步求得光束横截面的面积为:

$$S = \pi a^2 \quad (8)$$

激光光束照射到圆柱体靶目标侧面的交汇区域即为激光辐照面域。迎面辐照飞行靶情形中,由于光束与靶目标 o_1z_1 轴之间存在夹角 α_1 , 则该交汇区域的水平投影为椭圆,其 o_1y_1 轴方向的半轴 a , o_1z_1 轴方向的半轴为 $a/\sin\alpha_1$ 。

横向辐照飞行靶情形中,由于光束与靶目标 o_2x_2 轴的夹角 α_{1x} 以及和激光束与靶目标 o_2z_2 轴的夹角 α_{1z} , 则该交汇区域的水平投影为椭圆,其 o_2x_2 轴方向的半轴为 $a/\sin\alpha_{1x}$, o_2z_2 轴方向的半轴为 $a/\sin\alpha_{1z}$ 。

给出辐照面域在局部坐标系中的坐标表示。可以求出,迎面辐照飞行靶情形中,辐照面域在坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 中的表达式为:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = R_1^2 \\ \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{(a/\sin\alpha_1)^2} \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

横向辐照飞行靶情形中,辐照面域在坐标系 $o_2-x_2y_2z_2$ 中的表达式为:

$$\begin{cases} x_2^2 + y_2^2 = R_1^2 \\ \frac{x_2^2}{(a/\sin\alpha_{1x})^2} + \frac{z_2^2}{(a/\sin\alpha_{1z})^2} \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

进一步求解位于圆柱体侧面的激光辐照面域的面积,不同场景中的面积分别为:

$$S_1 = \frac{1}{2 \cdot \sin\alpha_1} \pi^2 a^2 \quad (11)$$

$$S_2 = \frac{1}{2 \cdot \sin\alpha_{1x} \cdot \sin\alpha_{1z}} \pi^2 a^2 \quad (12)$$

式中:角度 α_1 、 α_{1x} 和 α_{1z} 与光斑半径 a 是随着靶目标飞行而不断变化的值。

由公式(9)~(12)可以看出,激光辐照飞行靶过程中,辐照面域是与激光器和靶目标相对位置相关的变量。

(3) 激光功率密度分布

由于大气透过率 τ 的存在,当激光束的传输距离为 L 时,靶目标上的激光功率 P 和激光发射功率 P_0 之间满足:

$$P = P_0 \cdot \tau \quad (13)$$

式中: $\tau = \exp(-\gamma \cdot L)$, γ 为大气衰减系数,影响因素包括大气分子吸收、大气分子散射、大气中气溶胶吸收和大气中气溶胶散射。参考文献[8]中给出了天气状况好,能见度为 20~25 km 时,大气衰减系数 γ 的取值范围为 0.196~0.078 km⁻¹。

可以求得靶目标的激光平均功率密度为:

$$q = \frac{P}{S} = P_0 \cdot \frac{\exp(-\gamma \cdot L)}{\pi \cdot \phi^2 \cdot L^2} \quad (14)$$

设定激光光束为高斯激光束,激光的功率密度分布为:

$$I(r) = I_0 \cdot \exp(-2r^2/r_0^2) \quad (15)$$

式中: I_0 为激光束光斑中心的功率密度; r 为光斑区域内任意一点到光斑中心的距离; r_0 为激光束的光斑半径。其中, I_0 可以表示为^[9]:

$$I_0 = \frac{2q}{1-e^{-2}} \quad (16)$$

迎面辐照飞行靶情形中,由于光束与靶目标 o_1z_1 轴之间存在夹角 α_1 ,激光功率密度在辐照面域上的分布为椭圆形高斯分布。其中 o_1y_1 轴方向的半轴为 a ; o_1z_1 轴方向的半轴为 $a/\sin\alpha_1$ 。则在坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 中,辐照面域激光功率密度分布表达式:

$$I(y_1, z_1) = I_0 \cdot \exp\left(-2 \cdot \left(\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{(a/\sin\alpha_1)^2}\right)\right) \quad (17)$$

横向辐照飞行靶情形中,由于夹角 α_{1x} 和夹角 α_{1z} 的存在,激光功率密度在辐照面域上的分布为椭圆形高斯分布。其中 o_2x_2 轴方向的半轴为 $a/\sin\alpha_{1x}$; o_2z_2 轴方向的半轴为 $a/\sin\alpha_{1z}$ 。则在坐标系 $o_1-x_2y_2z_2$ 中,辐照面域激光功率密度分布表达式为:

$$I(x_2, z_2) = I_0 \cdot \exp\left(-2 \cdot \left(\frac{x_2^2}{(a/\sin\alpha_{1x})^2} + \frac{z_2^2}{(a/\sin\alpha_{1z})^2}\right)\right) \quad (18)$$

由公式(14)~(18)可知,激光辐照飞行靶过程中,平均功率密度、光斑中心功率密度以及功率密度分布是与激光器和靶目标相对位置相关的变量。

2.2 热传导方程

激光光束到达飞行靶,经过激光与物质的相互作用,靶目标产生温升效应。其中,热传导是求解激光辐照温度场分布的基础。

设定条件:

- (1) 不考虑靶目标在激光辐照过程中产生的相变和熔融现象;
- (2) 忽略热对流和热辐射形式的能量交换;
- (3) 不考虑激光在大气传输过程中受到的大气湍流、非线性效应等影响;
- (4) 不考虑材料物性参数和表面反射率随温度的变化。

由傅里叶定律可知,不存在体热源的情形下,三维柱坐标下瞬态热传导方程为^[10]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (19)$$

式中: ρ 为密度; c 为比热容; T 为温度; k 为热导率; t 为时间。

求解特定问题的热传导方程,须进一步确定初始条件和边界条件。

其中,初始条件是指靶目标在辐照初始时刻的温度值 T_0 ,即:

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (20)$$

边界条件主要包括加载于圆柱体靶目标侧面的热流密度和热对流,即:

$$\begin{cases} -k \frac{\partial T}{\partial r}|_{\Gamma_1} = (1-R) \cdot I(r) \\ -k \frac{\partial T}{\partial r}|_{\Gamma_2} = h_f \cdot (T_w - T_r) \end{cases} \quad (21)$$

式中: Γ_1 为激光辐照面域; Γ_2 为靶目标的侧面; R 为材料表面的反射系数; h_f 为对流换热系数; T_w 为靶面温度; T_r 为环境温度。

由公式(19)~(21)可知,建立的激光辐照飞行靶热传导模型具有如下特点:

- (1) 三维柱坐标下瞬态热传导方程;
- (2) 椭圆形高斯光束加载于圆柱体靶目标侧面的激光辐照面域;
- (3) 辐照面域和功率密度分布随时间而变化。

3 数值模拟

数值求解复杂边界条件下的热传导方程,常用的方法包括有限差分法、有限分析法、有限单元法和有限容积法等。其中,有限容积法具有计算简单、容易实施和物理意义明确的优点,是热传导问题求解过程中最常用的数值方法。其具体思想为:将空间区域划分为一系列控制容积单元,通过将控制方程对控制容积做积分来导出离散方程,进而求解方程组得出结果^[11]。

3.1 参数设定

激光器参数设定:发射功率 P_0 为 1×10^5 W;激光波长为 $3.8 \mu\text{m}$;光束发散角 ϕ 为 2×10^{-5} rad。

靶目标参数设定:底面半径 R_1 为 0.15 m;长度 d 为 0.8 m;飞行速率 V_0 为 200 m/s;靶目标材料为 30CrMnSiA 钢;材料表面的反射系数 R 为 0.3 。

辐照场景参数设定:激光辐照时间设定为 5 s;初始温度 T_0 和环境温度 T_r 为 27 °C;大气衰减系数 γ 的值为 0.078 km^{-1} ;对流换热系数 h_f 为 $820 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。

迎面辐照飞行靶情形中,设定靶目标飞行高度 H_1 为 $1\,000$ m,激光辐照初始时刻靶目标坐标为 $(0, -3\,000, 1\,000)$ m。

横向辐照飞行靶情形中,设定靶目标飞行高度 H_2 为 $1\,000$ m,激光器初始坐标为 $(1\,000, 0, 0)$ m,激光辐照初始时刻靶目标坐标为 $(0, -3\,000, 1\,000)$ m。

3.2 温度场分布的求解

采用有限容积法数值求解热传导方程的步骤为:

(1) 空间离散 建立与靶目标固联的圆柱坐标系 $o-r\alpha z$, 并进行区域离散。

(2) 离散方程的建立 将描述传热过程的偏微分方程在单位时间和空间上积分, 得到不同时间离散点时, 空间所有节点的离散方程组。

(3) 边界条件的处理 采用附加源项法, 将激光辐照面坐标和功率密度分布函数进行时间和空间离散, 通过节点坐标的判定, 将功率密度的代数值作为当量源项补充到圆柱体侧面上节点的离散方程中。

(4) 离散方程的求解 采用迭代法求解线性离散方程组, 并判定求解结果的收敛性。

首先求解位于圆柱体靶目标侧面上椭圆形辐照面域半轴的值, 如图 2 所示。

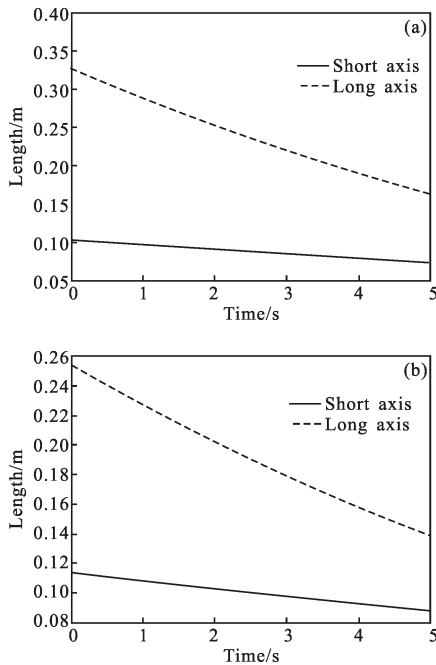


图 2 辐照面域长半轴和短半轴的值
Fig.2 Values of long-axis and short-axis of irradiating area

激光迎面辐照靶目标情形中(见图 2(a)), o_1y_1 轴方向半轴为短半轴, o_1z_1 轴方向半轴为长半轴; 激光横向辐照靶目标情形中(见图 2(b)), o_2x_2 轴方向半轴为短半轴, o_2z_2 轴方向半轴为长半轴。结合图 2(a)和 2(b)可知, 随着辐照时间的增加, 椭圆形辐照面域半轴减小, 意味着激光辐照靶目标的光斑尺寸随辐照时间的增加逐渐减小。

不同场景中, 到达靶目标的平均功率密度随辐照时间的变化如图 3 所示。

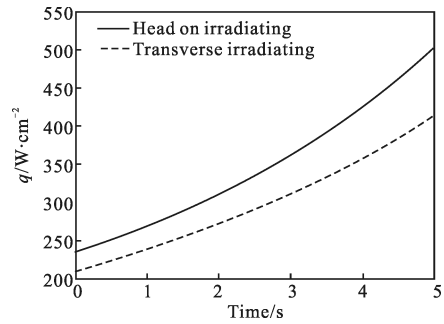


图 3 平均功率密度
Fig.3 Values of average power density

至此, 可以求得每一时刻激光束作用在靶目标的平均功率密度分布。 $t=5\text{ s}$ 时, 激光迎面辐照靶目标情形中(见图 4(a)), 激光束光斑中心的功率密度为 $1\ 159\ \text{W}/\text{cm}^2$, 椭圆形高斯光束短半轴为 $7.30\ \text{cm}$, 长半轴为 $16.33\ \text{cm}$; 激光横向辐照靶目标情形中(见图 4(b)), 激光束光斑中心的功率密度为 $949.9\ \text{W}/\text{cm}^2$, 椭圆形高斯光束短半轴为 $8.76\ \text{cm}$, 长半轴为 $13.86\ \text{cm}$ 。

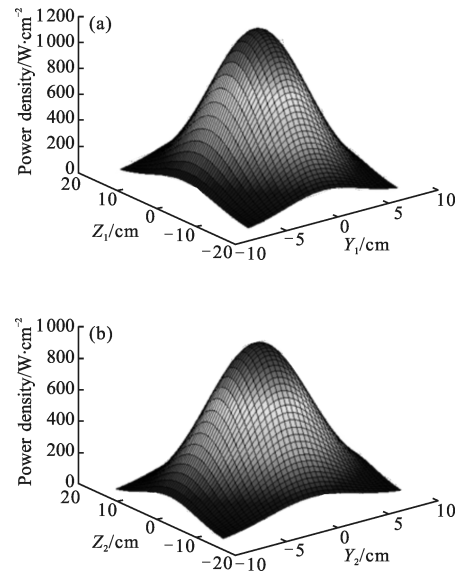


图 4 $t=5\text{ s}$ 时辐照面功率密度分布
Fig.4 Power destiny distributing at $t=5\text{ s}$

采用有限容积法, 数值求解靶目标温度场的时空分布。 $t=5\text{ s}$ 时刻, 激光器对圆柱体侧面的可视部分, 即半个侧面的温度场如图 5 所示。

$t=5\text{ s}$ 时, 激光迎面辐照靶目标情形中, 圆柱靶目标侧面最高温度为 $721.3\text{ }^\circ\text{C}$, 最高点位于侧面中心; 激光横向辐照靶目标情形中, 侧面最高温度为 $273.4\text{ }^\circ\text{C}$, 最高点位于侧面中心。不同场景中, 辐照中

心点温度变化曲线如图 6 所示。

由图 5 和图 6 可知, 当靶目标的初始位置和运动轨迹相同的条件下, 根据激光器位置的不同, 辐照场景分为迎面辐照和横向辐照; 由于横向辐照光束传输距离远, 达到靶目标的平均功率密度比迎面辐照低, 最终导致靶目标表面温度低于前者。

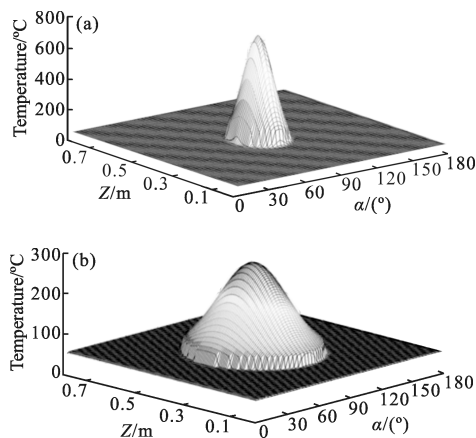


图 5 圆柱体侧面温度场($t=5\text{ s}$)

Fig.5 Temperature field of column area at $t=5\text{ s}$

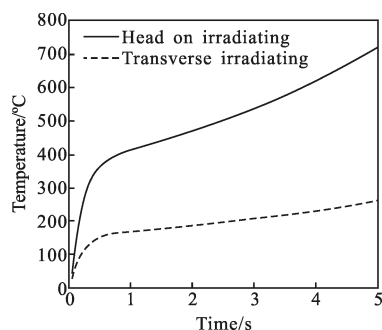


图 6 中心点温度变化曲线

Fig.6 Temperature of center points

3.3 目标运动性影响分析

在激光辐照运动目标温度场分布求解基础上, 对比激光辐照静止目标, 分析运动目标辐照参数特性对激光辐照温度场的影响:(1) 由于激光器与靶目标之间距离的变化, 辐照面域的平均功率密度不断变化。随着靶目标的运动, 激光器与目标的距离不断减小, 导致辐照面积不断减小以及能量大气传输损失不断降低, 导致辐照面域平均功率密度不断增加, 激光辐照引起的目标升温速率不断增加。(2) 由于激光束与靶目标夹角的存在, 激光束强度的空间分布由圆形高斯分布转化成为椭圆形高斯分布, 且其长半轴和短半轴不断变化。激光束辐照运动目标的角度不同, 辐照面域的功率密度空间分布不同; 同时辐照

面积不断变化, 温升区域也随之变化。

4 结论

通过建立地基激光辐照飞行靶的两种交汇场景, 分别求解了辐照面域、激光功率密度分布等辐照参数, 建立了辐照模型; 设定仿真条件, 采用有限容积法数值求解了靶目标的温度场分布, 并进行了目标运动性影响分析。分析结果表明: 飞行靶目标的温度场分布受辐照面域和功率密度分布等辐照参数变化的影响。可以看到, 随着目标飞行速度的提高, 影响会更大。因此, 对高速飞行目标的毁伤, 必须关注目标飞行所致的激光交会参数变化带来的影响。

参考文献:

- [1] Boley C D, Rubenchik A M. Modeling Antimortar Lethality by a Solid-State Heat-Capacity Laser[R]. California: UCRL-CONF-209983, 2005.
- [2] Boley C D, Fochs S, Rotter M, et al. A directed energy system for defeat of improvised explosive devices and landmines[R]. California: UCRL-PROC-220154, 2006.
- [3] Jiao Lugang. Effects of laser irradiation to metal/explosive [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2008: 1-2. (in Chinese)
- [4] Jiao Luguang, Zhao Guomin. Numerical simulation of three-dimensional temperature field of metal/explosive irradiated by high energy laser[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2011, 40(9): 1715-1719. (in Chinese)
- [5] Wang Weiping, Tan Fuli, Zhang Kexing, et al. Ignition threshold of metal covered energetic material by laser beam [J]. *Laser Technology*, 2001, 24(3): 199-202. (in Chinese)
- [6] Hong Yanji. Physics in Direct Energy Technology[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2011: 112. (in Chinese)
- [7] Li Haiyan, Hu Yunan, Liu Xudong. Energy estimation method for laser disturbing photoelectrical detectors in remote distance [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2010, 39(6): 1038-1043. (in Chinese)
- [8] Hong Yanji. Physics in Direct Energy Technology [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2011: 158. (in Chinese)
- [9] Wang Weiping, Liu Xufa, Liu Changling. An investigation on CW laser induced two-dimensional nonlinear temperature field of metals[J]. *Chinese Journal of High Pressure Physics*, 1996, 10(4): 219-274. (in Chinese)
- [10] Holman J P. Heat Transfer [M]. 10th ed. New York: McGraw-Hill Companies, 2010: 4-5.
- [11] Tao Wenquan. Numerical Heat Transfer [M]. 2nd ed. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001: 16. (in Chinese)