

## 从单幅干涉图中恢复相位的区间反转方法

曾文雯<sup>1,2,3</sup>, 钟小品<sup>4</sup>, 李景镇<sup>1,2</sup>

- (1. 深圳大学 电子科学与技术学院, 广东 深圳 518060; 2. 深圳大学 深圳微纳光子信息技术重点实验室, 广东 深圳 518060; 3. 深圳大学 光电工程学院, 广东 深圳 518060; 4. 深圳大学 机电与控制工程学院, 广东 深圳 518060)

**摘要:** 提出了一种从单幅干涉图中直接恢复相位的区间反转方法。分析余弦函数正负号歧义问题, 导出反余弦相位和相位  $2\pi$  模之间的关系。由于在反余弦的  $(\pi, 2\pi)$  区间需要对相位反转, 将反转区间的确定问题转换为三段式折线拟合问题。利用遗传算法求解了折线的最小均方拟合, 且使用最小二乘法估计了干涉图的载频, 从而获得最佳相位估计。最后, 分别对一维和二维合成条纹图进行测试, 与传统的傅里叶变换方法和条纹分析方法比较, 证实了提出方法的有效性和易用性。

**关键词:** 干涉; 相位恢复; 条纹分析; 区间反转方法

**中图分类号:** O438.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2014)09-3151-06

## Retrieving phase from single interferogram by interval inversion method

Zeng Wenwen<sup>1,2,3</sup>, Zhong Xiaopin<sup>4</sup>, Li Jingzhen<sup>1,2</sup>

- (1. College of Electronic Science & Technology, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China;  
2. Shenzhen Key Laboratory of Micro-Nano Photonic Information Technology, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China;  
3. College of Optoelectronic Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China;  
4. College of Mechatronics & Control Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

**Abstract:** An interval inversion method was proposed to retrieve phase information directly from single interferogram. Due to the sign ambiguity of inverse cosine, an inversion was needed in the phase interval of  $(\pi, 2\pi)$ . This interval estimation was translated to a problem of fold-line fitting that can be solved by a genetic algorithm. Further, the least square was employed to find an optimal linear carrier frequency for the final phase distribution. The method was applied to one-dimensional and two-dimensional numerical examples. Simulation results, compared with the methods of traditional Fourier transform and fringe analysis, demonstrate the effectiveness and the ease of use.

**Key words:** interference; phase retrieval; fringe analysis; interval inversion method

收稿日期: 2014-01-08; 修订日期: 2014-02-12

基金项目: 国家自然科学基金仪器专项(61027014); 国家自然科学基金青年基金(61203184)

作者简介: 曾文雯(1983-), 女, 博士生, 主要从事全息干涉方面的研究。Email: zengww@szu.edu.cn

导师简介: 李景镇(1940-), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事瞬态光学成像技术和光子学方面的研究。Email: lijz@szu.edu.cn

## 0 引言

大量光学技术如干涉计量、全息成像等依赖于光场的相位信息<sup>[1]</sup>,然而光学成像仪器所记录的光干涉明暗条纹只是光场的强度信息,相位信息全部丢失,因此从干涉图中推算出相位分布一直是光学发展中一个重要的问题。

目前研究的主要方法有相移法和空域载波法。相移法(Phase shifting)<sup>[2]</sup>通过规则地改变相干光之间的光程差来获取不同的条纹分布图,从而把空间相位提取问题简化为时域坐标下正弦信号的相位读取问题,随着相移量的不同可以得到三点公式、四点公式、Carré 等算法。这类方法需要高速摄像获得多幅连续干涉图才能进行,对硬件要求很高,实现较困难。

空域载波法则引入一个相对较大的空间频率对相位进行调制,即在干涉图中加入一个较大的倾斜,对硬件要求不高,是目前最容易使用的方法种类,主要包括傅里叶变换(FT)方法<sup>[3]</sup>和条纹分析法(Fringe Analysis)<sup>[4]</sup>等。

其中 FT 方法分析发现干涉图的频域信息中零级频谱和正负一级频谱清晰可辨,通过滤波获得正或负一级频谱,求 FT 反变换后即可得到相位分布。实际上 FT 方法是调和函数线性组合的最小二乘拟合。因此 FT 方法只要求单幅载波干涉图,实现简便,但计算量大,且依赖于使用适当大小的载波,精度不高。最近 Qian 提出窗口 FT 方法<sup>[5]</sup>来适应各种条纹图。

条纹分析法对干涉图像进行多种数字滤波处理,例如去噪、二值化、骨架化等,从而找到相位差为整数倍的位置并插值得到其余位置的相位。该法需要运用大量滤波器,实现复杂,受噪声干扰严重,计算量大。

另外,还有一些特殊的方法,例如正则化的相位跟踪技术(Regularized Phase Tracking)<sup>[6]</sup>是一种局部处理方法,即在局部区域内构造多个余弦元素来匹配干涉图,这一方法对噪声较敏感;锁相技术(Phase Locking)<sup>[7]</sup>则使用某频率的正弦参考光,采用以该频率为中心的带通滤波,可以得到在相位差为整数倍的位置,因此锁相环技术是条纹分析方法的动态版本,与条纹分析具有同样的缺陷。

国内学者对该问题也进行了相当多的工作,大多基于上述的基础方法开展研究,并加以应用。综上所述,上述技术使用条件多、理解难、不易实现,文中则提出一种称为相位区间反转方法,该方法是一种从干涉图的反余弦函数中直接提取相位的简便方法,从解决符号歧义和  $2\pi$  歧义<sup>[1]</sup>出发,分析反余弦函数的相位反转问题,获得  $(\pi, 2\pi)$  区间的反三角函数,最后通过解包裹得到结果相位。仿真结果及其分析表明该方法处理简便,比传统的方法得到更精确更稳定的结果。

## 1 相位区间反转方法

不失一般性,仅在  $x$  方向上考虑载波,相干光干涉图的亮度分布  $I(x,y)$  可表示为:

$$I(x,y)=a(x,y)+b(x,y)\cos\{\omega_0x+\phi(x,y)\} \quad (1)$$

式中: $a(x,y)$ 与 $b(x,y)$ 分别为在干涉图中缓慢变化的背景和对比度; $\phi(x,y)$ 为需要恢复的相位信息; $\omega_0$ 为载波频率,其应大于相位变化的最大频率以保证总相位 $\omega_0x+\phi(x,y)$ 是单调增的,即 $\omega_0$ 满足 $\omega_0>\max_x|\partial\phi(x,y)/\partial x|$ 。

参考文献[8]已指出通过一些简单操作,即可去除: $a(x,y)$ 以及 $b(x,y)$ ,公式(1)可被归一化为:

$$\bar{I}(x,y)=\cos\{\omega_0x+\phi(x,y)\} \quad (2)$$

对上式直接进行求反余弦函数,可以得到如下相位函数值:

$$\varphi(x,y)=\arccos(\bar{I}) \quad (3)$$

然而 $\varphi(x,y) \in [0, \pi)$ 和 $\phi(x,y) \in [0, 2\pi)$ 之间并没有直接的联系,无法从 $\varphi(x,y)$ 直接获得所求 $\phi(x,y)$ 。事实上,由于正负符号歧义问题<sup>[1]</sup>, $\phi(x,y)$ 将满足

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} \phi_m(x,y) & \phi_m < \pi \\ 2\pi-\phi_m(x,y) & \phi_m \geq \pi \end{cases} \quad (4)$$

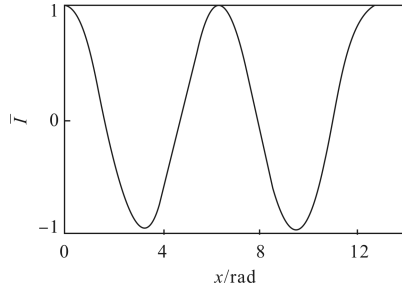
其中, $\phi_m$ 是 $\omega_0x+\phi(x,y)$ 对 $2\pi$ 取模运算的结果,即

$$\phi_m(x,y)=(\omega_0x+\phi(x,y))\bmod 2\pi \quad (5)$$

公式(5)称为相位的 $2\pi$ 歧义问题<sup>[1]</sup>。从 $\phi_m(x,y)$ 到 $\omega_0x+\phi(x,y)$ 这一步则可由多种相位解缠绕算法实现<sup>[9]</sup>。因此,从 $\varphi(x,y)$ 恢复 $\phi(x,y)$ 的关键是确定在什么位置对 $\varphi(x,y)$ 进行公式(4)中的 $\phi_m(x,y)$ 正负号反转,提出方法称作相位区间反转方法。综上所述,以一维情况为例,提出方法的相位恢复过程如图1所示。不难发

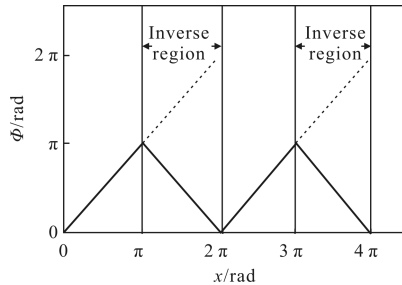
现,在空间载频  $\omega_0$  足够大的情况下,结果相位是单调增函数,如图 1(d)所示。因此归一化条纹的逆余弦函数在单调减区间需要进行相位反转操作,才能得到正确的相位信息,如图 1(b)所示。

提出方法中,剩下的问题是如何确定反转区间,以及确定未知空间载频等。



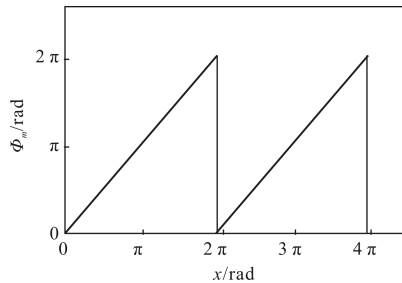
(a) 条纹图

(a) 1D fringe example



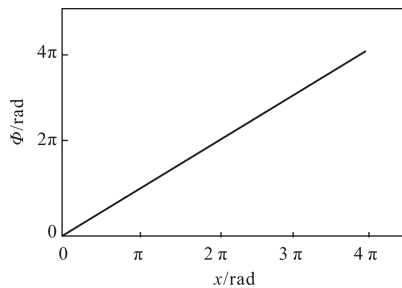
(b) 归一化条纹的逆余弦函数值

(b) Normalized arc-cosine of fringe (a)



(c) 反转后待解包裹相位

(c) Phase after interval inversion of (b)



(d) 解包裹后得到的结果相位

(d) Phase unwrapped of (c)

图 1 通过反余弦函数求解相位的过程

Fig.1 Process of phase extraction from inverse cosine

### 1.1 相位反转区域确定

如图 1(b)所示,最直观的确定办法是将逆余弦函数值的单调减区间作为反转区间,可以从一阶导数得到。但从导数确定逆余弦函数的单调减区间极易受到测量噪声的干扰,为了减小这一影响,文中提出使用折线拟合的方法来确定相位反转区间。

若已知逆余弦函数值如图 2 中虚线所示,定义三段式折线  $AB-BC-CD$ ,如图中实线所示,即待定四点坐标分别为  $A$  点  $(x_1,0)$ 、 $B$  点  $(x_2,\pi)$ 、 $C$  点  $(x_3,0)$  以及  $D$  点  $(x_4,\pi)$ ,其中  $BC$  线段的横坐标区间  $(x_2,x_3)$  即为反转区间。

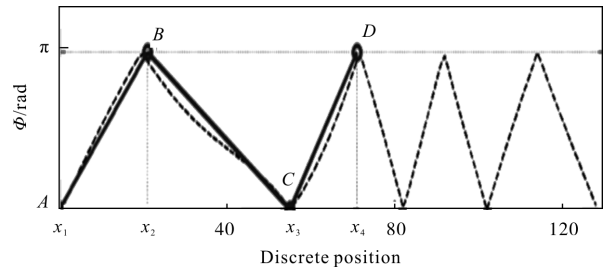


图 2 折线拟合示意图

Fig.2 Illustration of fold line fitting

定义上述三段线段函数分别为:

$$g_{AB}(s,t) = \{(s,0) + \alpha \cdot (t,\pi) | \alpha \in [0,1]\} \quad (6)$$

$$g_{BC}(u,v) = \{(u,\pi) + \beta \cdot (v,0) | \beta \in [0,1]\} \quad (7)$$

$$g_{CD}(p,q) = \{(p,0) + \gamma \cdot (q,\pi) | \gamma \in [0,1]\} \quad (8)$$

因此该折线与逆余弦函数值的最小均方拟合为:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = \underset{(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{x_4 - x_1} \int [g_1(x_1, x_2) + g_2(x_2, x_3) + g_3(x_3, x_4) - \varphi(x_1 : x_4, y)]^2 \quad (9)$$

式中:  $\varphi(x_1 : x_4, y)$  表示横坐标从  $x_1$  到  $x_4$  之间的逆余弦函数曲线段。在离散的状态下,上述拟合问题可改写为加法的形式。

为了解决这一难以求梯度的问题,笔者引入遗传算法来寻找最优反转区间,形成如表 1 所示算法。

表 1 相位反转区间确定算法

Tab.1 Interval inversion estimation algorithm

1	Population initialization: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \leftarrow (x_0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ , where is the first point value, and $x_2^0, x_3^0, x_4^0$ are set as arbitrary value larger than $x_0$ ;
2	Employing GA algorithm to get the optimum $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ yielded in (9)
3	Output the inversion region $(x_2^*, x_3^*)$ ;
4	If $x_4^*$ is not out of region, then continue to get next inversion region: initializing $x_0 \leftarrow x_3^*$ , go to step 1, else return.

值得注意的是,在应用于二维的情况下,相邻扫描线上的实际相位一般不发生突变,因此可以一定技巧实现加速,如以上一条扫描线中得到的反转区间为中心小方差随机采样得到下一条扫描线的初始种群。仿真表明,如此实现的 GA 算法一般在 10 代之内即可收敛。

1.2 载频优化

如果载波频率未知,传统的空间载波法将无法正常发挥作用。假设通过提出的相位区间反转方法获得含载波相位分布为  $\phi_\omega(x,y)=\omega_x x+\omega_y y+\hat{\phi}(x,y)$ , 其中  $\omega_x, \omega_y$  分别为  $x$  和  $y$  方向上的载频,  $\hat{\phi}(x,y)$  是相位估计分布。因此若载频足够大,公式(1)中的载波频率可由最小二乘估计来确定。仅考虑  $x$  方向上的载频,则最优载频为:

$$\omega_0^* = \operatorname{arccmin}_{\omega_0} \sum_{x,y} (\phi_\omega(x,y) - \omega_0 x)^2 \quad (10)$$

仿真实验中发现,当相位分布中大部分位置上的值为零时,该最优载频非常接近真实载频。

2 仿真分析

此节分别对一维和二维仿真情况作讨论,特别地和傅里叶变换的方法做比较。为方便比较相位估计,仿真中使用均方根误差,若已估计得到相位  $\hat{\phi}(x,y)$ , 误差即为:

$$\operatorname{err} = \sqrt{\sum_{x,y} [\phi(x,y) - \hat{\phi}(x,y)]^2 / N} \quad (11)$$

式中:  $N$  为相位图中所考虑的总点数。

2.1 一维仿真

考虑一个从 1~128 的一维相位函数如下:

$$\phi_1(x) = a \cdot \exp\{- (x-64)^2 / \sigma^2\}, x \in [1, 128] \quad (12)$$

这是一个具有均值 64 方差  $\sigma^2$ 、比例为  $a$  的高斯函数。分别使用表 2 中的四组比例、标准差以及载频计算干涉条纹,提出算法所得到的相位估计与 FT 方法作误差比较。

从表 2 中不难发现,FT 方法的误差变化比较大,原因在于载频的选择。表中  $\bar{\omega}$  表示相对载频为载频与相位最大变化率的比值,即

$$\bar{\omega} = \omega_0 / \max_x |\partial \phi(x,y) / \partial x| \quad (13)$$

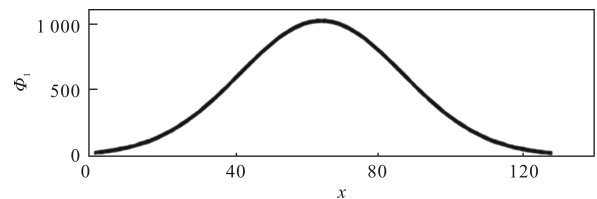
表 2 真实相位分布参数以及误差对比

Tab.2 True phase settings and error comparison

Setting	$\alpha$	$\sigma$	$\omega_0$	$\bar{\omega}$	FT error	Error of new method
1	100	32	32	11.94	0.139	2.155 4
2	100	8	128	11.97	0.018 7	4.789 0
3	1000	32	32	1.194	19.85	6.35
4	1 000	8	128	1.198	9.72	6.39

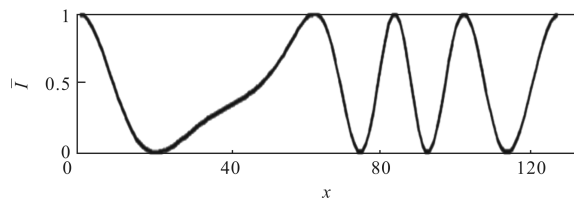
FT 方法的误差随相对载频影响较大,提出的方法受此因素影响较小,可以适应各种情况。

选第 3 组为例,绘制原始相位以及估计相位曲线如图 3 所示。图中,图 3(b)~图 3(d)展示了提出方法的恢复过程,图 3(c)显示了折线拟合效果,与反余弦曲线的折点充分一致。不难发现,傅里叶变换方法得到的相位图有一点偏移现象,结果不是对称的高斯曲线、而提出算法得到较好结果。另外值得注意的是,在图 3(e)中放大部分显示,提出算法恢复的曲线在某些点处存在一定程度的跳跃,其原因是在离散情况下,反余弦函数的零值点和值点的位置可能没有被采样,导致确定的反转区间存在



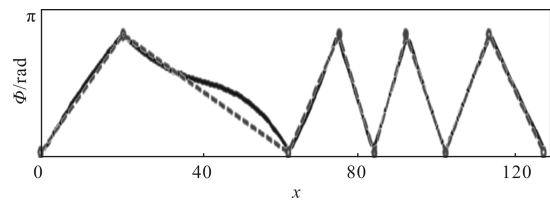
(a) 一维真实相位分布

(a) Real 1D simulated phase distribution



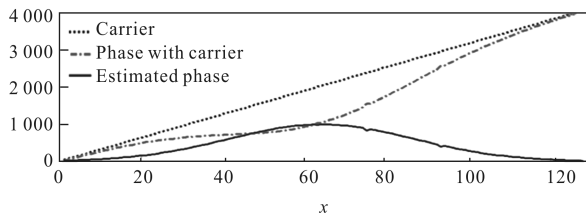
(b) 相位 (a) 的亮度分布

(b) Intensity distribution of phase (a)



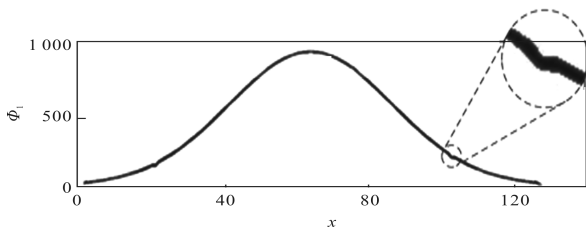
(c) 反余弦曲线(实线)及折线拟合结果(虚折线)

(c) Arc-cosine curve (solid) and fold-line fitting (dash)



(d) 载波、带载波相位以及相位恢复结果

(d) Carrier, phase with carrier and estimated phase



(e) 提出方法相位恢复结果

(e) Phase extraction result by proposed method

图 3 一维相位恢复仿真结果对比

Fig.3 Comparison of one-dimensional phase retrieval

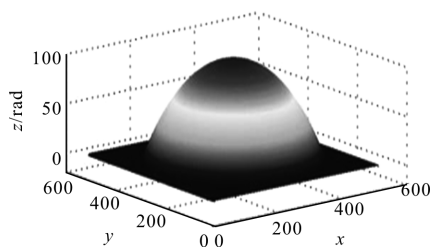
一定的偏差,这种偏差将随着采样点的增多而减小。

## 2.2 二维仿真

使用如下半球形相位函数:

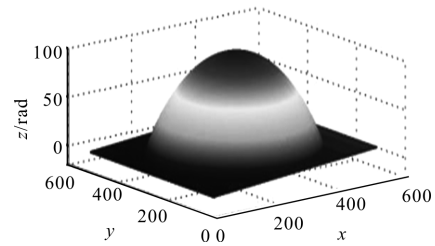
$$\phi_2(x,y) = \begin{cases} 0, & (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 > r^2 + 200^2 \\ \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2} - 200, & \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $x,y$  满足  $0 \leq x,y \leq 512$ , 半径  $r=300$ , 中心点  $(x_0,y_0)=(256,256)$ , 真实相位如图 4(a)所示。假设只有  $x$  方向的载频且为 32, 应用 FT 方法、条纹分析方法以及提出算法恢复相位分别得到如图 4(b)(c)所示的相位曲面。其中, 提出方法在二维仿真时采用在  $x$  方向上按线扫描的方式, 即把二维恢复问题看作多个一维恢复问题。同一维情况, 提出算法中个别区域出现跳跃, 但误差相对较小。



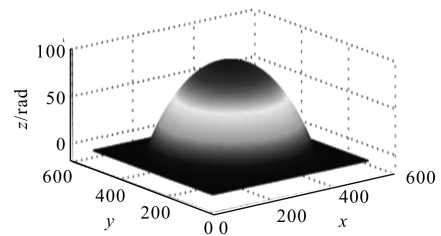
(a) 原始模拟相位

(a) Simulated 2D phase distribution



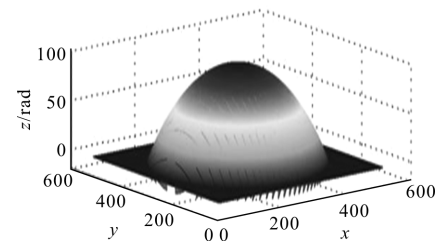
(b) FT 方法恢复结果(误差 9.83)

(b) Phase retrieval by FT method (error=9.83)



(c) 条纹跟踪方法恢复结果(误差 6.62)

(c) Phase retrieved by fringe tracking (error=6.62)



(d) 提出方法恢复结果(误差 2.50)

(d) Phase extracted by proposed method (error=2.50)

图 4 二维相位恢复仿真结果对比

Fig.4 Comparison of two-dimensional phase retrieval

若使用如下三峰相位函数:

$$\phi_3(x,y) = 20e^{-\frac{(x-2)^2 + (y-1.5)^2}{4}} + 15e^{-\frac{(x-0.5)^2 + (y-1.5)^2}{1}} + 10e^{-\frac{(x+1)^2 + (y+3)^2}{2}} \quad (15)$$

其中,  $x,y$  满足  $-5 \leq x,y \leq 5$ , 采样间隔为 0.02, 公式(1)中的载频为 10,  $a(x,y)=b(x,y)=10$ , 并在生成的干涉图中考虑均值为零、方差为 1 的加性高斯噪声, 得到如图 6(a)所示的条纹图, 以及如图 6(b)所示的真实相位  $2\pi$  模。提出方法在二维仿真时采用在  $x$  方向上按线扫描的方式, 图 5 展示了其中第 200 线的恢复效果对比, 提出方法虽然在某些点存在跳跃, 但总体上比 FT 方法更贴近真实相位。图 6(c)是 FT 方法恢复的相位  $2\pi$  模, 误差为 1.90, 而图 6(d)为提出算法恢复的结果, 误差 0.46。同样可以看出, 提出算法得到更好的结果, 其中条纹状的细线产生的原因同一维

的情况,在某些点上存在跳跃。

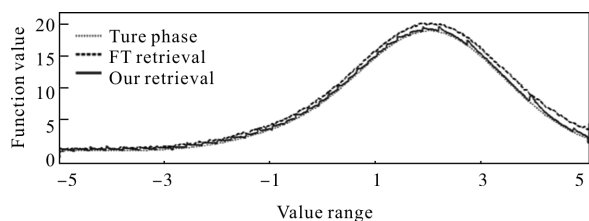
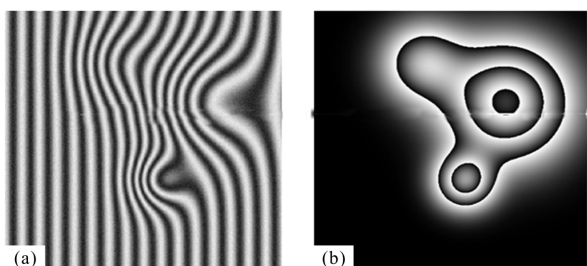


图 5 三峰相位恢复仿真第 200 线对比

Fig.5 Comparison of the 200th line of three-peak phase

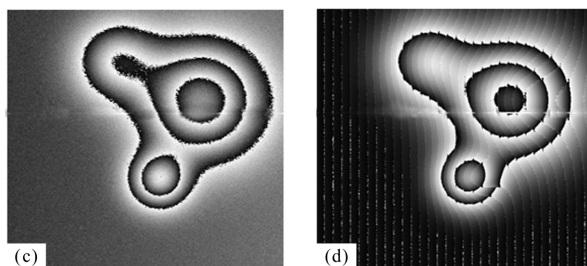


(a) 三峰条纹图

(b) 真实相位模

(a) Fringe of 3-peak phase

(b) Modulo of real phase



(c) FT 方法恢复相位模(误差 1.90)

(d) 提出方法恢复相位模

(c) Phase modulo by FT (error=1.90) (d) Phase modulo by proposed method

图 6 三峰相位恢复仿真结果对比(图中白实线为第 200 线)

Fig.6 Comparison of 3-peak phase retrieval (white solid line: the 200th line)

### 3 结束语

文中提出一种称为相位区间反转的方法,该方法直接从干涉图的反余弦函数中恢复相位,即在反余弦函数的特定区间对相位进行符号反转操作,解

包裹再去载波倾斜量即可得到真实相位的估计。从仿真分析中可以发现,提出的相位区间反转方法容易理解,实现简便,计算简单,在各种情况都拥有小而稳定的恢复误差及较好的恢复效果,相对于传统的傅里叶变换和条纹分析等方法更适用于具有各种不同梯度大小的相位图。该方法在某些相位位置出现不同程度的跳跃,如何减缓这一问题今后进一步的工作。

### 参考文献:

- [1] Kreis T. Hand book of Holographic Interferometry: Optical and Digital Methods: Optical and Digital Methods [M]. Weinheim: Wiley-VCH, 2005.
- [2] Ji í Novák, Pavel Novák, Antonín Mikš. Multi-step phase-shifting algorithms insensitive to linear phase shift errors[J]. *Optics Communications*, 2008, 281 (21): 5302-5309.
- [3] Takeda M, Ina H, Kobayashi S. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1982, 72(1): 156-160.
- [4] Osten W. Digital Image Processing For Optical Metrology [M]. US: Springer, 2008: 481-564.
- [5] Kemao Q. Two-dimensional windowed Fourier transform for fringe pattern analysis: principles, applications and implementations[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2007, 45(2): 304-317.
- [6] Kai L, Kemao Q. A generalized regularized phase tracker for demodulation of a single fringe pattern [J]. *Optics Express*, 2012, 20(11): 12579-12592.
- [7] Servin M, Rodriguez -Vera R. Two-dimensional phase locked loop demodulation of interferograms [J]. *Journal of Modern Optics*, 1993, 40(11): 2087-2094.
- [8] Quiroga J A, Servin M. Isotropic n-dimensional fringe pattern normalization [J]. *Optics Communications*, 2003, 224(4): 221-227.
- [9] Estrada J C, Servin M, Vargas J. 2D simultaneous phase unwrapping and filtering: A review and comparison [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2012, 50(8): 1026-1029.