

## 用 TS 算法实现三波片型 PSG 的偏振态快速转换

黄春晖, 魏 源

(福州大学 物理与信息工程学院, 福建 福州 350108)

**摘 要:** 设计了一种三波片型偏振态发生器(PSG), 分析 PSG 的结构特点, 导出了 Stokes 参量的变换关系。基于禁忌搜索(Tabu Search, TS)算法原理, 提出了一种既能实现偏振态的快速变换又能降低晶体两端电压的控制算法。仿真结果表明, 采用该控制算法, PSG 能够将输入的线偏光转换为任意偏振光, 绝对精度可达 0.07%。如果把 Stokes 参量  $S_2$  和  $S_3$  限定在 Poincare 球的特定区域内, 通过该控制算法可产生所需的偏振态并保证控制电压大小在 120 V 以内。最后, 通过实验验证该算法能够满足单光束连续变量相干光通信编码的需要。

**关键词:** 偏振态发生器; Stokes 参量; 连续变量相干光通信; TS 算法

**中图分类号:** TN918 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)01-0195-06

## Rapid conversion between polarization states in the three-wave-plate PSG by TS algorithm

Huang Chunhui, Wei Yuan

(College of Physics and Information Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

**Abstract:** A three-plate-type polarization state generator (PSG) was designed and the transformation of Stokes parameters was derived according to the structure characteristics of PSG. Based on the principle of Tabu Search (referred to as TS) algorithm, a control algorithm was proposed which was able to not only achieve the rapid transformation between the polarization states but also reduce the bias-voltage across the crystal. The simulation results show that, by using this control algorithm, the PSG can transform the linear polarization into arbitrary polarization and the precision can arrive to 0.07%. If the Stokes parameter  $S_2$  and  $S_3$  were restricted to the specific region on the Poincare sphere, the desired polarization state was generated by this control algorithm and the control voltage amplitude was ensured within 120 V. Last, the experimental results show that, this control algorithm could satisfy the requirement of encoding in continuous variables coherent optical communication of single beam.

**Key words:** PSG; Stokes parameters; continuous variables coherent optical communication; TS algorithm

收稿日期: 2014-05-07; 修订日期: 2014-06-13

基金项目: 国家自然科学基金(61177072)

作者简介: 黄春晖(1959-), 男, 教授, 研究生导师, 博士, 主要从事量子通信与集成电路设计等方面的研究。

Email: hchuang@fzu.edu.cn

## 0 引言

连续变量相干光通信<sup>[1]</sup>是以相干态连续变量光信号作为信息载体的一种通信方式,是连续变量量子保密通信的主要研究方向之一。其优点是成本低、通信质量稳定及较易实现等,已成为当前的研究热点<sup>[2-4]</sup>。目前连续变量相干光通信一般采用基于 Mach-Zehnder 干涉仪的双光束传输,以高斯态相干光信号作为载波,对光信号的振幅和相位进行编码,实现连续变量量子密钥分配<sup>[5]</sup>。这种通信方案需要通过测量光波获得幅度和相位,实现难度较大。为了克服上述难点,文中采用单光束传输方式<sup>[6]</sup>,以  $S_2$  和  $S_3$  两个正交的 Stokes 分量取代幅度和相位实现偏振编码。通过测量偏振光强获得 Stokes 参量,不仅容易实现,而且克服了双光束传输过程中难以保持光信号的同步性和相干性的弊端<sup>[7]</sup>。

实现单光束连续变量相干光通信的关键器件是偏振态发生器 (Polarization State Generator, PSG),该器件用于完成 Stokes 参量变换,即偏振态编码。PSG 主要由偏振控制器 (Polarization Controller, PC) 组成,目前已有多种 PC,但大多用于扰偏、偏振跟踪和补偿<sup>[8]</sup>,难以实现偏振态的随机变换。PC 常用的控制算法有梯度算法和模拟退火算法,控制算法需要将输出端得到的偏振光反馈给输入端,通过比较改变 PC 偏压,修正偏振态,使得某一方向的输出光强趋于 0 (如水平方向),以满足需要<sup>[9]</sup>。总之,目前的 PC 在通信中起着维持信号偏振态稳定的作用。为了满足单光束连续变量相干光通信的编码需要,文中设计一种新颖的三波片型 LiNbO<sub>3</sub> 晶体 PSG,采用禁忌搜索 (Tabu Search, TS) 算法作为其偏振控制算法,实现偏振态编码。对控制算法进行了功能仿真和实验验证,结果表明了该控制算法具有可行性。

## 1 PSG 的结构设计

任意偏振光都可用 Stokes 矢量来表示,其归一化形式为:

$$S = [1 \ S_1 \ S_2 \ S_3]^T \quad (1)$$

在量子状态下,Stokes 参量变成 Stokes 算符,力学算符之间满足以下关系<sup>[10]</sup>:

$$\Delta \hat{S}_2 \Delta \hat{S}_3 \geq |\langle \hat{S}_1 \rangle| \quad (2)$$

式中:  $\Delta \hat{S}_2, \Delta \hat{S}_3$  为方差;  $\langle \hat{S}_1 \rangle$  为期望值,这表明,只要有一个 Stokes 算符分量不为零,就不能同时精确测量另外两个分量,说明任意两个正交的 Stokes 算符满足海森堡测不准原理和量子不可克隆原理,可将其作为量子保密通信中的可操作算符。文中选择相对较易测量的  $S_2$  和  $S_3$  作为测量基组。

### 1.1 三波片型 PSG 结构

采用三波片型 PSG,其内部晶体排列为  $0^\circ - 45^\circ - 0^\circ$  结构,如图 1 所示。

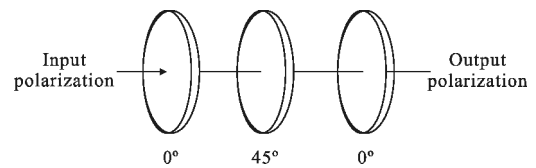


图 1 PSG 的结构

Fig.1 Structure of PSG

利用 LiNbO<sub>3</sub> 晶体具有一次电光系数大的优势,根据其电光系数矩阵,可以得到 LiNbO<sub>3</sub> 晶体的外控电压与晶体延迟量之间的关系为<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} \delta_1 = 0.006542V_1 + 1.571 & \alpha_1 = 0^\circ \\ \delta_2 = 0.0049V_2 & \alpha_2 = 45^\circ \\ \delta_3 = 0.006542V_3 + 1.571 & \alpha_3 = 0^\circ \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $\delta$  为晶体延迟量;  $V$  为施加在晶体两端的电压;  $\alpha$  为晶体主光轴方位角。

由电光晶片构成偏振控制器件,晶片的 Muller 矩阵  $M$  与主光轴方位角  $\alpha$  和晶体延时量  $\delta$  的关系如下:

$$M(0^\circ, \delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\delta & \sin\delta \\ 0 & 0 & -\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad M(45^\circ, \delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & 0 & -\sin\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\delta & 0 & \cos\delta \end{bmatrix} \quad (4)$$

这样,由矩阵理论得到输出偏振态为:

$$S_{out} = M_3(0^\circ, \delta_3) \times M_2(45^\circ, \delta_2) \times M_1(0^\circ, \delta_1) \times S_{in} \quad (5)$$

### 1.2 单光束连续变量相干光通信进程分析

在双光束连续变量相干光通信中,需要先将弱信号光调制后再与较强的本征光束混频,然后通过光电转换和零差检测电路获得其偏振态。在单光束连续变量相干光通信中,选择 Stokes 参量  $S_2$  和  $S_3$  作为测量基组,与双光束连续变量相干光通信中的信

号光和本征光进行类比, 设置一个阈值  $T$  趋近于 1 但总小于 1, 如 0.9, 可认为: (1) 当  $S_3 \geq T$  时(归一化后的值), 此时,  $S_3$  作为本征光,  $S_2$  则作为信号光, 可以对  $S_2$  进行编码; (2) 当  $S_2 \geq T$  (归一化后的值), 与 (1) 相反,  $S_2$  作为本征光,  $S_3$  则作为信号光, 可对  $S_3$  进行编码。这样, 只需完成 Poincare 球上两个小区域的偏振态变换即可实现对偏振态的编码。

为了充分利用三波片型 PSG 的结构, 入射光方向取  $-45^\circ$  线偏振光  $[1 \ 0 \ -1 \ 0]^T$ , 使得三块波片均能对偏振态变换产生作用。由公式(5)得, 经过三波片型 LiNbO<sub>3</sub> 晶体 PSG 后的偏振态为(为了叙述方便, 以  $3 \times 3$  的矩阵表示):

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \delta_2 \sin \delta_1 \\ -\cos \delta_3 \cos \delta_1 + \sin \delta_3 \cos \delta_2 \sin \delta_1 \\ \sin \delta_3 \cos \delta_1 + \cos \delta_3 \cos \delta_2 \sin \delta_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

结合公式(3)知, 只需改变晶体的外加电压即可得到所需的偏振态。

## 2 TS 算法构造

TS 算法是由 Glover 在 1986 年提出的一种元启发式优化算法<sup>[11]</sup>。TS 算法模仿人类的记忆功能, 使

$$A = \begin{bmatrix} \sin \delta_2 \cos \delta_1 & \cos \delta_2 \sin \delta_1 & 0 \\ \cos \delta_3 \sin \delta_1 + \sin \delta_3 \cos \delta_2 \cos \delta_1 & -\sin \delta_3 \sin \delta_2 \sin \delta_1 & -\sin \delta_3 \cos \delta_1 + \cos \delta_3 \cos \delta_2 \sin \delta_1 \\ -\sin \delta_3 \sin \delta_1 + \cos \delta_3 \cos \delta_2 \cos \delta_1 & -\cos \delta_3 \sin \delta_2 \sin \delta_1 & \cos \delta_3 \cos \delta_1 - \sin \delta_3 \cos \delta_2 \sin \delta_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

因此, 只要  $\delta$  变化足够小, 那么, 在 TS 算法搜索的每一步中, 邻域的产生可用公式(10)表示:

$$S_{k+1}^i = S_k + dS_k^i \quad (10)$$

式中:  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $N$  代表邻域个数;  $k$  表示迭代次数;  $S_k$  为当前偏振态;  $S_{k+1}^i$  为  $S_k$  的邻域。

电光晶体可等效为平板电容, 其两端电压不允许发生突变, 因此在搜索过程中, 搜索步长  $t$  不能太大(最大步长取为  $1V$ )。考虑到第 1、3 波片是完全相同的两块晶体, 为了避免出现两块晶体的偏压一块很大, 一块很小的情况, 对其施加相同的偏压且变化趋势相同。

针对步长  $t$ , 每块晶体两端可以变化  $+tV$ 、 $0V$  和  $-tV$  电压, 那么, 在当前解附近可以寻找到  $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot 1-1=8$  个偏振态, 结合公式(3)、(8)、(9)可知, 这 8 个偏振态必然在当前偏振态附近的 8 个对称方向。

采用同心超矩形来分割当前解的邻域空间, 以

用禁忌表来封锁刚搜索过的区域以避免迂回搜索, 同时赦免禁忌区域中的一些优良状态, 进而保证多样化的有效搜索以达到全局优化。文中针对偏振控制要求, 构造了 TS 算法的系统框架。

### (1) 适值函数

文中采用的适值函形式为:

$$f = (S_{1out} - S_1)^2 + (S_{2out} - S_2)^2 + (S_{3out} - S_3)^2 \quad (7)$$

式中:  $[S_{1out} \ S_{2out} \ S_{3out}]^T$  表示预期的目标偏振态;  $[S_1 \ S_2 \ S_3]^T$  表示搜索过程中的中间偏振态。

### (2) 初始解的获得

将上一轮期望得到的目标偏振态作为下一轮搜索的初始解。

### (3) 邻域的产生

若候选解集为整个邻域, 将大大增加计算量, 故选取邻域的一部分来构成候选解集。接下来将详细分析邻域的产生。

将公式(6)对  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  和  $\delta_3$  进行微分操作, 可得:

$$dS = \begin{bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \\ dS_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} d\delta_1 \\ d\delta_2 \\ d\delta_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中,  $A_{11} = \frac{dS_1}{d\delta_1} = \sin \delta_2 \cos \delta_1$ ,  $A_{12} = \frac{dS_1}{d\delta_2} = \cos \delta_2 \sin \delta_1$ ,  $\dots$ , 即

$1V$  为最大步长,  $0.1V$  为最小步长,  $0.1V$  为间距将邻域分割为 10 个子邻域, 在每个子邻域中产生一个点(有 8 个点可选)。这样, 电压  $V$  的 10 个邻域解为:

$$V_{ij}' = V_j + t_{ij} \quad i=1, 2, \dots, 10, j=1, 2, 3 \quad (11)$$

式中:  $i$  表示第  $i$  个子邻域;  $j$  表示第  $j$  块晶体。其邻域空间的划分示意图如图 2 所示。

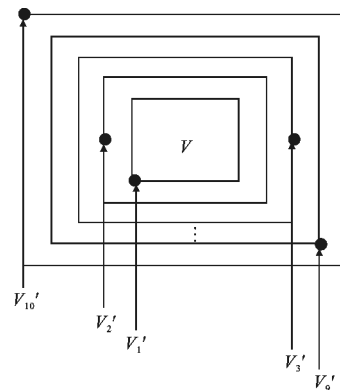


图 2 邻域空间划分示意图

Fig.2 Schematic diagram of neighborhood space

(4) 禁忌表

禁忌表是 TS 算法的核心,其大小在很大程度上影响搜索速度和解的质量<sup>[12]</sup>。禁忌表有两要素:禁忌对象和禁忌长度。文中将适应值作为禁忌对象,增加其禁忌范围。禁忌长度是禁忌表的大小,一个禁忌对象进入禁忌表后,只有经过一个确定的迭代次数,才能从禁忌表中退出。文中的禁忌长度采用固定值 8。

(5) 特赦准则

采用基于适应值的准则,即如果某个候选解的适应值优于历史最优值,也称为“Best to Far”状态,那么无论这个候选解是否处于被禁忌状态,都会被接受。

(6) 停止准则

当适应值 $<5 \times 10^{-7}$ ,即绝对精度达到 0.07%,则满足停止准则。边界处理方式:

$$V_j = \begin{cases} Vu_j - (V_j - Vu_j) & V_j \geq Vu_j \\ V_j & Vl_j \leq V_j \leq Vu_j \\ Vl_j - (V_j - Vl_j) & V_j \leq Vl_j \end{cases} \quad (12)$$

上述算法的伪代码如下:

给定初始解  $V$ , 令历史最优解  $V^* = V, f^* = f(V)$ , 禁忌表  $TabuList = \Phi, V' = \Phi$ 。

```

While ( $f^* > 5 \times 10^{-7}$ )
{生成  $V$  的邻域和候选解集 SolutionList( $V$ );
While (SolutionList( $V$ )  $\neq \Phi$  and  $V' = \Phi$ )
{从 SolutionList( $V$ )中选出最优解  $V'$ ;
if ( $V' \in TabuList$ )
    令 SolutionList( $V$ )= SolutionList( $V$ )
    - { $V'$ },  $V' = \Phi$ ;
elseif  $f(V') < f^*$ 
     $V^* = V', f^* = f(V')$ ;
}
if (找到最优解  $V'$ )
把  $V'$  加入到 TabuList 中, 令  $V = V'$ ;
}
    
```

3 仿真结果与分析

对从入射偏振态 $[1 \ 0 \ -1 \ 0]^T$  搜索到目标偏振态 $[1 \ 0.173 \ 2 \ 0.4 \ 0.9]^T$  的搜索路径进行仿真,结果如图3、图4和图5所示。

图3描述的是偏振态变换的搜索路径,球面上每个点代表每次搜索过程中第  $k$  次迭代的当前解。注意,初始时由于第 1、3 波片存在自然双折射,所以

不加电压时的初始偏振态近似为 $[1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ 。是在搜索过程中,偏振态点连续地变动,对应于晶体两端的电压连续地变化。完成一次偏振变换之后,所得的电压值组直接作为下一次控制变换的初始电压值组。最终,当适应值小于 $5 \times 10^{-7}$ 时,被认为与目标偏振态即图中的黑点(被遮住了)一致。从图4中的适应值变化也可以看到最终的适应值趋于 0,说明与目标偏振态充分靠近。这就达到了利用所设计的 PSG 实现偏振态的产生,即完成偏振编码的目的。

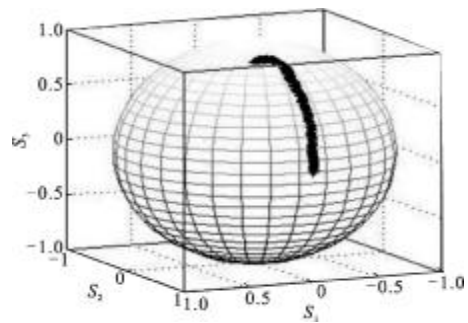


图 3 偏振态变换的搜索路径

Fig.3 Search path of polarization conversion

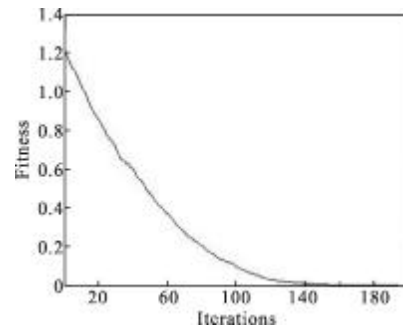


图 4 适应值变化

Fig.4 Evolution of the fitness

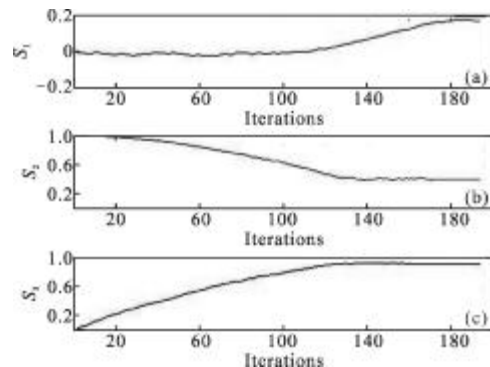


图 5 Stokes 参量变化

Fig.5 Transformation of Stokes parameters

图 5 中的三个图分别对应着每次搜索过程中偏

振态的 Stokes 参量  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  的变化情况,可以看到,经过迭代后, $S_1$  靠近 0.173 2,  $S_2$  靠近 0.4,  $S_3$  靠近 0.9。

为了进一步说明算法的可行性,取  $S_3 \geq 0.9$  的区域,同时由于区域具有对称性,将  $S_2$  均取正值。对 50 个随机偏振态进行仿真,结果如图 6 和图 7 所示。

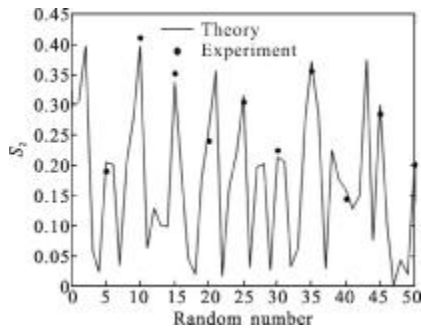


图 6 50 个随机的  $S_2$  分布曲线以及 10 个实验值

Fig.6 Distribution curve of  $S_2$  and 10 points of  $S_2$  measurement

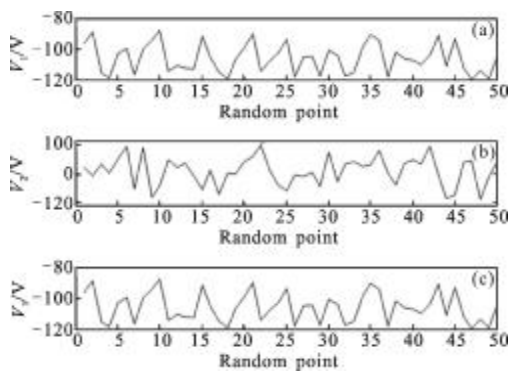


图 7 晶体外加电压的变化

Fig.7 Change of applied voltage on the crystals

图 6 中的黑线是 50 个随机目标偏振态的  $S_2$  归一化后的值的分布曲线。图 7 中的 3 条曲线分别是 3 块晶体的电压变化,可以看到  $V_1$  和  $V_3$  的变化范围在 -80 V ~ -120 V,  $V_2$  的变化范围在 -100 ~ 100 V。因此,只需限定电压在上述范围中,就可以产生  $S_3 \geq$

0.9 区域内的所有偏振态( $S_2 \geq 0.9$  的区域所需的电压值更小),完成对  $S_2$  的编码,同时也降低了对电源电路的要求。

#### 4 实验结果与分析

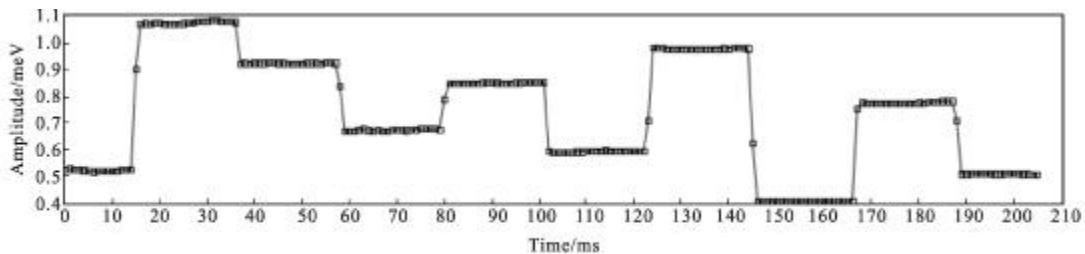
实验用 808 nm 激光器做光源、以 DSP2812 和 STM32F103 为核心的控制系统、三波片型 LiNbO<sub>3</sub> 晶体 PSG,零差检测系统、相关光学器件、PCI6111E 采集卡以及 LabVIEW 软件等构成测量系统。对图 5 中每隔 5 个点,即第 5、10、...50 个偏振态进行实验验证。Stokes 参量的值与 3 块晶体两端所加的电压关系如表 1 所示。

表 1 Stokes 参量与晶体两端施加的电压

Tab.1 Stokes parameters and the applied voltage on the crystal

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$V_1/V$	$V_2/V$	$V_3/V$
0.191 3	0.204 0	0.960 1	-102.9	50.6	-102.9
-0.174 5	0.396 5	0.901 3	-87.6	-42.7	-87.6
-0.229 1	0.337 0	0.913 2	-91.6	-57.4	-91.6
0.167 2	0.259 0	0.951 3	-98.9	43.2	-98.9
-0.229 7	0.315 2	0.920 8	-93.4	-58.0	-93.4
0.283 0	0.212 8	0.935 2	-100.4	74.7	-100.4
0.120 5	0.371 7	0.920 5	-90.3	29.7	-90.3
0.178 0	0.158 4	0.971 2	-106.7	47.9	-106.7
-0.293 3	0.299 8	0.907 8	-93.2	-74.7	-93.2
0.175 3	0.203 3	0.963 3	-103.2	46.2	-103.2

输入偏振态经过上述系统,经过光电转换,将光强值转换为电压值(单位:V)并成近似线性正比关系(硬件电路参数决定)。通过对光束采样,最终在 LabVIEW 上显示出来。该实验中,采用的总光强所对应的平均电压值约为 2.697 318 214 5 V( $S_0$  对应的电压值),测得的电压波形如图 8 中的上方波形所示,



0.5368359375 1.085058594 0.9255078125 0.6721582031 0.8502294922 0.589301578 0.9788427734 0.4043896464 0.7857307634 0.5261948931

图 8 实验测量得到的电压波形

Fig.8 Voltage waveform by experimental measurements

图 8 下方的数组则分别是 10 个电平的平均值。

经过归一化后<sup>[13]</sup>,将实验得到的  $S_2$  的值(图 6 中点)与  $S_2$  的理论值加以比较,

由图 6 显示的  $S_2$  的实验值与理论值是存在一定的偏差的,这是由于存在系统误差(包括硬件误差和测量误差等),但基本与理论曲线一致,验证了该算法的可行性。

## 5 结 论

该文针对单光束通信中的偏振编码需要,利用 TS 算法实现三波片型  $\text{LiNbO}_3$  晶体 PSG 的偏振态变换。通过 MATLAB 编程对该控制算法进行功能仿真和验证,仿真结果表明,该控制算法可以实现从固定的输入偏振态转变为期望的任意输出偏振态且绝对精度可达 0.07%。将 Stokes 参量  $S_2$  和  $S_3$  类比双光束通信中的信号光和本征光,通过该控制算法可产生所需的偏振态并保证控制电压在 120 V 以内。最后,利用实验室已有的控制系统及其相关光路等硬件条件,对该控制算法进行了实验验证,实验结果表明,该算法能应用于实际的单光束连续变量相干光通信中。

## 参考文献:

- [1] Grosshans F, Van Assche G, Wenger J, et al. Quantum key distribution using Gaussian-modulated coherent states [J]. *Nature*, 2003, 421: 238-241.
- [2] Braunstein S L, Van Loock P. Quantum information with continuous variables [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2005, 77(2): 513-577.
- [3] Grosshans F, Van Assche G, Wenger J, et al. Quantum key distribution using Gaussian-modulated coherent states [J]. *Nature*, 2003, 421(6290): 238-241.
- [4] Han Cheng, Bai Baoxing, Zhao Xin, et al. Acquisition control system of free space laser communication [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2009, 38(1): 91-95. (in Chinese)  
韩成, 白宝兴, 赵馨, 等. 自由空间激光通信捕获控制系统 [J]. *红外与激光工程*, 2009, 38(1): 91-95.
- [5] Ke Xizheng, Chen Juan, Deng Lijun, Research progress of space-time code in wireless optical communication (I) [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(7): 1882-1889. (in Chinese)
- [6] Huang Chunhui, Rong Weibo. A control scheme of polarization generator based on three  $\text{LiNbO}_3$  wave plates [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2013, 50(5): 052303. (in Chinese)  
黄春晖, 荣维波. 三波片型  $\text{LiNbO}_3$  偏振态产生器的控制方案设计 [J]. *激光与光电子学进展*, 2013, 50(5): 052303.
- [7] Stefano Pirandola, Stefano Mancini, Seth Lloyd, et al. Continuous-variable quantum cryptography using two-way quantum communication [J]. *Nature Physics*, 2008, 4(9): 726-730.
- [8] Lih Y Lin, Evan L Goldstein, Nicholas J Frigo, et al. Micromachined polarization-state controller and its application to polarization-mode dispersion compensation [C]// *Optical Fiber Communication Conference*, 2000, 3: 244-246.
- [9] Li Weiwen, Zhang Xianmin, Chen Kangsheng, et al. A study for phase-shift characteristics of polarization controller based on simulated annealing algorithm [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, 25(4): 449-453. (in Chinese)  
李伟文, 章献民, 陈抗生, 等. 基于模拟退火算法的偏振控制器波片相移特性研究 [J]. *光学学报*, 2005, 25(4): 449-453.
- [10] Dong Chuanhua. The quantum description of polarization states of light and its evolutions in the processes of interaction with atoms [J]. *Acta Physics Sinica*, 2005, 54(2): 687-695. (in Chinese)  
董传华. 在与原子相互作用中光偏振态的量子描述及其演化 [J]. *物理学报*, 2005, 54(2): 687-695.
- [11] Fred Glover. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence [J]. *Computers & Operations Research*, 1986, 13(5): 533-549.
- [12] Fred Glover, Lv Zhipeng, Hao Jinkao. Diversification-driven tabu search for unconstrained binary quadratic problems [J]. *4OR - A Quarterly Journal of Operations Research*, 2010, 8(3): 239-253.
- [13] Liu Xiaocheng, Xue Mogen, Huang Qincao, et al. Algorithm of infrared polarization image path registration based on matrix recovery [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 43(8): 2733-2739. (in Chinese)  
刘晓诚, 薛模根, 黄勤超, 等. 基于矩阵恢复的红外偏振图像分区配准算法 [J]. *红外与激光工程*, 2013, 43(8): 2733-2739.