

# 高斯-谢尔模型阵列光束在湍流大气中的空间相干性

卢芳, 韩香娥

(西安电子科技大学 物理与光电工程学院, 陕西 西安 710071)

**摘要:** 基于广义 Huygens-Fresnel 原理和 Rytov 相位结构函数二次近似的方法, 推导出了径向分布高斯-谢尔模(GSM)阵列光束在湍流大气中传输时的交叉谱密度函数解析表达式, 并利用表征光束相干性的空间复相干度系数, 详细分析了 GSM 阵列光束在大气湍流中传输时的空间相干性变化规律。研究表明: 径向分布 GSM 阵列光束的空间相干性由子光束空间相干长度、传输距离、大气折射率结构常数及相对径向填充因子等因素共同确定; 径向分布 GSM 阵列光束通过湍流大气时, 其空间相干度在传输过程中会出现多峰值现象, 但是随着传输距离增大, 多峰值现象逐渐消失并趋向于高斯分布, 并且随着距离增大空间相干度宽度逐渐减小, 光束空间相干性变差。

**关键词:** 空间相干度; 高斯-谢尔模型; 阵列光束; 大气湍流; 交叉谱密度函数

**中图分类号:** O431.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)01-0305-05

## Spatial coherence properties of GSM array beams in turbulent atmosphere

Lu Fang, Han Xiang'e

(School of Physics and Optoelectronic Engineering, Xidian University, XI'an 710071, China)

**Abstract:** Based on the extended Huygens-Fresnel principle and the quadratic approximation of Rytov's phase structure function, the analytical expression for the cross-spectral density function of the Gaussian Schell-Model (GSM) array beams propagating in atmospheric turbulence was derived. The degree of spatial coherence of GSM array beams in atmospheric turbulence was investigated numerically. The result shows that the spatial coherence properties of the GSM array beams are determined by the coherent length of beamlets, the transmission distance, the refractive index structure constant of atmospheric turbulence and the relative radial fill factor of the source in common. It also shows that the spatial coherence of the GSM array beams ends as Gaussian distribution, but multiple peaks are existed during the transmission, the width of the degree of coherence becomes smaller with the transmission distance continues increase which means that the degree of spatial coherence turns worse.

**Key words:** degree of spatial coherence; Gaussian Schell-model; array beams; atmospheric turbulence; cross-spectral density function

收稿日期: 2014-05-05; 修订日期: 2014-06-10

基金项目: 教育部博士点基金(20110203110009); 国家部委预研项目(62401110309)

作者简介: 卢芳(1985-), 女, 博士生, 主要从事大气激光通信方面的研究。Email: lufang11@163.com

导师简介: 韩香娥(1962-), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事大气激光通信、小粒子散射、及光探测等方面的研究。

Email: xehan@mail.xidian.edu.cn

## 0 引言

阵列光束因其在激光照明、大气激光通信、高能武器及惯性约束聚变等领域的应用而备受人们关注<sup>[1-3]</sup>。但是光在湍流大气中传输时光束质量受到破坏,严重制约了阵列光束在大气激光通信和大气传输工程方面的应用。迄今为止,已有大量文献研究了线性、矩形和径向排布的相干或部分相干光束阵列在湍流大气中的传输特性<sup>[1-7]</sup>。这些研究主要集中于阵列光束的平均光强<sup>[1,4-7]</sup>、远场发散角<sup>[1]</sup>、光束质量因子<sup>[7]</sup>和桶中功率<sup>[4,6]</sup>(PIB)等,而对阵列光束在湍流大气中的空间相干性研究较少。

由于空间相干度在表征全程大气湍流对光束传输影响及光学自适应相位校正技术中具有极其重要的地位,研究 GSM 阵列光束在湍流大气中的空间相干性变化规律具有重要意义。文中基于广义 Huygens-Fresnel 原理和 Rytov 相位结构函数二次近似方法,以空间复相干度系数作为评价标准,详细研究了子光束空间相干长度、传输距离、大气折射率结构常数及相对径向填充因子等因素对 GSM 阵列光束空间相干度的影响。

## 1 理论推导

如图 1 所示,假设径向分布阵列光束由  $N$  束相

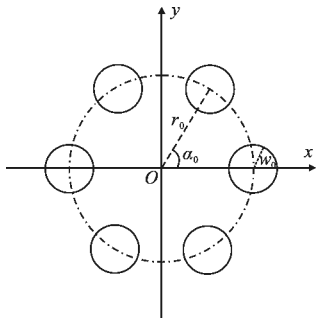


图 1 径向分布光束阵列示意图

Fig.1 Schematic illustration of a radial laser array beam

同的 GSM 光束构成,且均匀分布在半径为  $r_0$  的圆环上,相邻子光束角间距为  $\alpha_0=2\pi/N$ ,位于环上任意光束与  $x$  轴夹角为  $\alpha_n=n\alpha_0(n=0,1,2,\dots,N-1)$ ,则发射平面内径向分布 GSM 阵列光束的交叉谱密度函数可表示为<sup>[8-9]</sup>:

$$W^{(0)}(\rho_1', \rho_2', 0) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[ \frac{(\rho_1' - r_n)^2 + (\rho_2' - r_m)^2}{w_0^2} \right] \times \exp \left[ - \frac{[(\rho_1' - r_n) + (\rho_2' - r_m)]^2}{2\sigma_\mu^2} \right] \quad (1)$$

式中: $w_0$  为子光束束腰半径; $\sigma_\mu$  为子光束的随机相位起伏方差,表征子光束空间相干长度, $r_n=(r_0 \cos \alpha_n, r_0 \sin \alpha_n)$  为第  $n$  束 GSM 光束的中心, $\rho_1'$  和  $\rho_2'$  为发射平面坐标系内任意两点,当  $\sigma_\mu \rightarrow \infty$  时,公式(1)为基模高斯光束阵列交叉谱密度函数表达式。

根据广义 Huygens-Fresnel 原理,径向分布 GSM 阵列光束通过湍流大气传输在距离  $L$  处的交叉谱密度函数为<sup>[10-12]</sup>:

$$W(\rho_1, \rho_2, L) = \frac{1}{(\lambda L)^2} \iint d^2 \rho_1' d^2 \rho_2' \times W^{(0)}(\rho_1', \rho_2', 0) \times \exp \left[ -ik \frac{(\rho_1 - \rho_1')^2 - (\rho_2 - \rho_2')^2}{2L} \right] \times \langle \exp[\psi(\rho_1', \rho_1, L) + \psi^*(\rho_2', \rho_2, L)] \rangle \quad (2)$$

式中: $\rho_1$  和  $\rho_2$  为接收平面坐标系内任意两点; $\lambda$  为波长; $\psi(\rho', \rho, L)$  为球面波在湍流大气中从点  $(\rho', 0)$  到点  $(\rho, L)$  过程中引入的复随机相位起伏;\* 表示复共轭;< > 表示对湍流介质的系综平均,采用 Rytov 相位结构函数二次近似得到:

$$\langle \exp[\psi(\rho_1', \rho_1, L) + \psi^*(\rho_2', \rho_2, L)] \rangle = \exp \left[ - \frac{(\rho_1' - \rho_2')^2 + (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1' - \rho_2') + (\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_0} \right] \quad (3)$$

式中: $\rho_0=(0.545C_n^2 k^2 L)^{-3/5}$  为球面波通过大气湍流的空间相干长度; $C_n^2$  是表征湍流强度的大气折射率结构常数, $k=2\pi/\lambda$  为波数。

令  $u=(\rho_1' + \rho_2')/2, v=\rho_1' - \rho_2'$ , 则  $\rho_1'=u+v/2, \rho_2'=u-v/2$ , 将公式(1)和(3)代入公式(2),并利用积分变换得到:

$$W(\rho_1, \rho_2, L) = \frac{k^2 w_0^2}{8TL^2} \exp \left( - \frac{2r_0^2}{w_0^2} \right) \times \exp \left[ - \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{k^2 w_0^2}{8L^2} - \frac{\pi^2 \Delta^2}{T} \right) \rho^2 \right] \times \exp \left[ - \frac{k^2}{16L^2 T} (\rho_1 + \rho_2)^2 \right] \times \exp \left[ - \frac{ik}{2L} \left( 1 - \frac{\pi \Delta}{T} \right) (\rho_1^2 - \rho_2^2) \right] \times \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[ \left( \frac{1}{2w_0^2} - \frac{k^2}{16L^2 T} \right) (r_n + r_m)^2 \right] \times \exp \left[ \left( \frac{1}{4T \delta^4} - \frac{1}{2\sigma_\mu^2} \right) (r_n - r_m)^2 \right] \times$$

$$\exp\left[\frac{k^2}{8L^2T}(r_n+r_m)\cdot(\rho_1+\rho_2)\right]\exp\left[\frac{\pi\Delta}{T\delta^2}(r_n-r_m)\cdot p\right]\times$$

$$\exp\left\{\frac{ik}{2L}[(r_n+r_m)\cdot p-\frac{\pi\Delta}{T}(r_n+r_m)\cdot p+\frac{(r_n-r_m)\cdot(\rho_1+\rho_2)}{2\delta^2T}]\right\}$$
(4)

公式(4)即为径向分布高斯-谢尔模阵列光束在湍流大气中的交叉谱密度函数。其中  $p=\rho_1-\rho_2$ ,  $\frac{1}{\delta^2}=\frac{1}{w_0^2}+\frac{1}{\sigma_\mu^2}$ ,  $T=\frac{1}{2\delta^2}+\frac{1}{\rho_0}+\frac{k^2w_0^2}{8L^2}$ ,  $\Delta=\frac{kw_0^2}{4\lambda L^2}-\frac{1}{2\pi\rho_0}$ 。当  $r_0=0$ ,  $N=1$  时即可得到位于坐标中心的单束 GSM 光束在湍流大气中的交叉谱密度函数,与参考文献[12]中所推导的结果相一致。

为了研究 GSM 阵列光束在湍流大气中传输时的空间相干特性,引入光束空间复相干度系数,其定义为<sup>[13]</sup>:

$$|\mu(\rho_1, \rho_2, L)| = \frac{|W(\rho_1, \rho_2, L)|}{\sqrt{W(\rho_1, \rho_1, L)W(\rho_2, \rho_2, L)}} \quad (5)$$

将公式(4)代入公式(5)即可得到径向分布 GSM 阵列光束在湍流大气中传输时的空间复相干度系数。在下面一节中,将利用公式(5)讨论径向分布 GSM 阵列光束通过湍流大气传输时的空间相干度变化情况。

## 2 数值计算与分析

为了方便数值计算,设公式(5)中的  $\rho_1=\rho$ ,  $\rho_2=0$ , 结果如图 2~4 所示。其中光波长  $\lambda=1.55 \mu\text{m}$  为大气光通信实验常用波长。分别讨论子光束空间相干长度、传输距离、大气折射率结构常数及相对径向填充因子等因素对接收平面光束空间相干性的影响。图 2

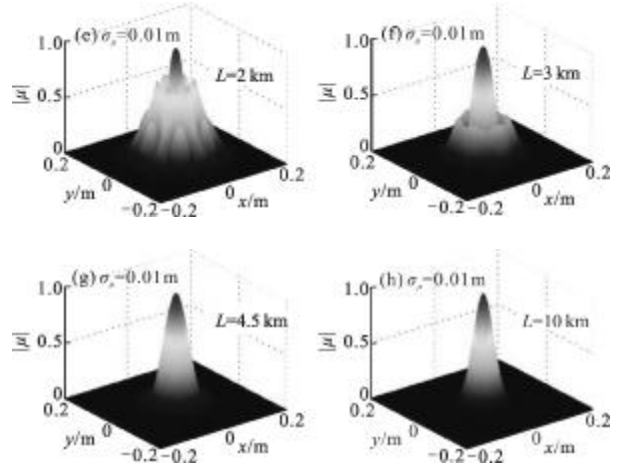
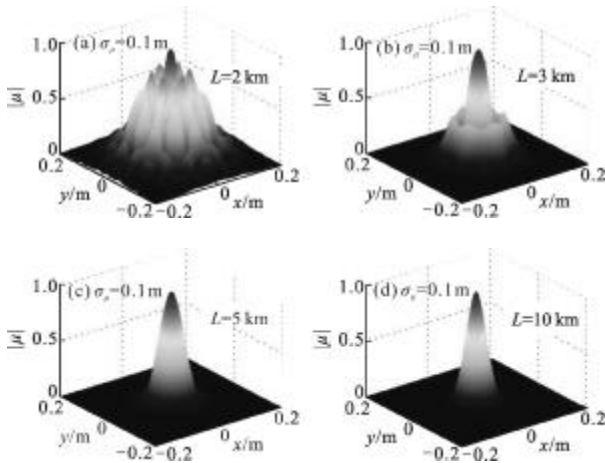


图 2 GSM 阵列光束在  $C_n^2=10^{-15} \text{m}^{-2/3}$  时的空间相干度分布  
Fig.2 Spatial degree of coherence distribution of GSM array beams at  $C_n^2=10^{-15} \text{m}^{-2/3}$

为子光束光源相干长度分别为  $\sigma_\mu=0.1 \text{m}$  和  $0.01 \text{m}$  的径向分布 GSM 阵列光束在  $C_n^2=10^{-15} \text{m}^{-2/3}$  的湍流大气中不同传输距离下的空间相干度分布曲线。其中各参量取值为  $N=6$ ,  $w_0=0.01 \text{m}$ ,  $r_0=0.04 \text{m}$ 。从图 2 可以看出,在传输距离较近时径向分布 GSM 阵列光束的空间相干度分布曲线都存在多峰值现象,随着距离增大,多峰值现象消失并趋向于高斯分布,并且高斯束腰随距离增大而逐渐减小,即光束空间相干性变差;光源相干长度越短达到高斯型分布所需的距离越短,当传输距离足够长后,不同光源相干长度的光束相干性趋于相同,这是因为在传输距离较近时光源相干长度起主导作用,随着传输距离的增大,湍流效应不断累加并逐渐占主导作用,这与单束 GSM 光束在湍流大气中传输时得到的结论一致。

图 3 为径向分布 GSM 阵列光束在  $C_n^2=10^{-14} \text{m}^{-2/3}$ ,  $\sigma_\mu=0.01 \text{m}$  时的空间相干度分布曲线。其他各参量取值与图 2 相同,在  $C_n^2=10^{-15} \text{m}^{-2/3}$  的弱湍流情况下,传

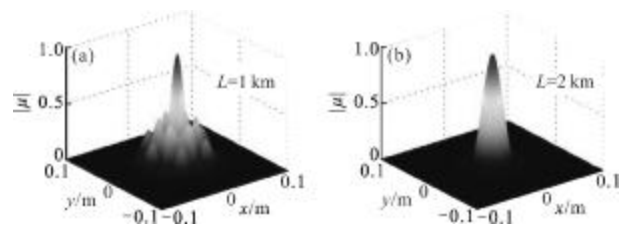


图 3 GSM 阵列光束在  $C_n^2=10^{-14} \text{m}^{-2/3}$  时的空间相干度分布  
Fig.3 Spatial degree of coherence distribution of GSM array beams at  $C_n^2=10^{-14} \text{m}^{-2/3}$

输距离达到 5 km 后空间相干度分布近似为高斯型分布;而在  $C_n^2=10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$  的较强湍流情况下,传输距离达到 2 km 时空间相干度分布即为高斯型分布。

图 4 给出了径向分布 GSM 阵列光束在不同相对径向填充因子下的空间相干度分布曲线,其中  $\sigma_\mu=0.01 \text{ m}$ ,  $w_0=0.01 \text{ m}$ ,  $N=6$ ,  $C_n^2=10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ 。在传输距离为 1 km 时,均存在多峰值现象。当相对径向填充因子  $r_0/w_0=2$  时,当传输距离达到  $L=1.5 \text{ km}$  后,光束空间相干度即可达到高斯型分布;当填充因子  $r_0/w_0=4$  时,当传输距离达到  $L=2.5 \text{ km}$  后,光束空间相干度达到高斯型分布;当相对径向填充因子  $r_0/w_0=6$  时,传输距离达到  $L=3 \text{ km}$  后,光束空间相干度才能达到高斯型分布。结果表明随着相对径向填充因子的增大,空间相干度分布达到高斯分布所需的传输距离越大。

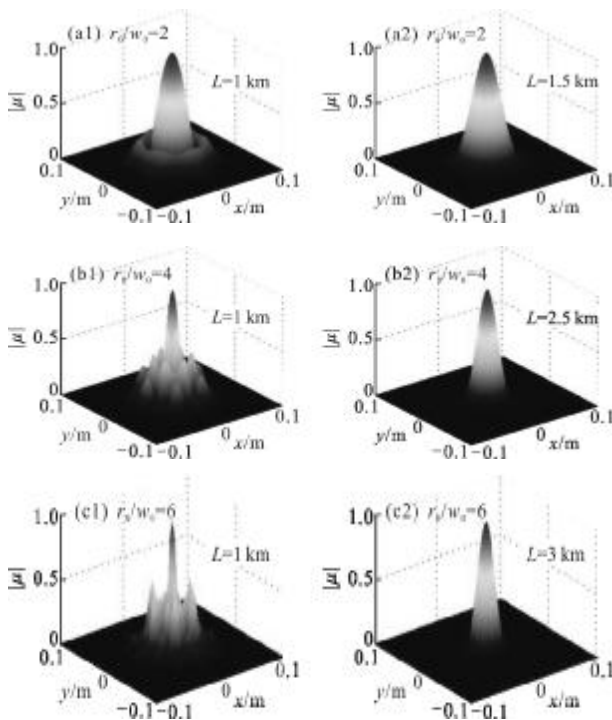


图 4 GSM 阵列光束在不同相对径向填充因子下的空间相干度分布

Fig.4 Spatial degree of coherence distribution of GSM array beams at different relative radial fill factor

### 3 结论

从广义 Huygens-Fresnel 原理出发,推导了径向分布 GSM 阵列光束在湍流大气中的交叉谱密度函

数解析表达式,并对光束的空间相干度进行数值模拟。研究表明,径向分布 GSM 阵列光束空间相干度在距离较近时存在多峰值现象,随着传输距离的增大,光束相干度多峰值现象消失并趋向于高斯分布,并且高斯束腰逐渐减小,即光束空间相干性变差;子光束初始空间相干性越差,达到高斯型分布所需的距离越短,并且当传输距离足够长后,不同子光束空间相干长度阵列光束的相干性趋于相同,这是因为在传输距离较近时光源相干尺寸起主导作用,随着传输距离的增大,湍流效应不断累加并逐渐占主导作用,这与单束 GSM 光束在湍流大气中传输时得到的结论一致;强湍流下空间相干度分布达到高斯形状分布所需的距离比弱湍流情况下的小;随着相对径向填充因子的增大,空间相干度分布达到高斯型分布需要的传输距离越大。研究 GSM 阵列光束在湍流大气中传输时的空间相干度特性对大气激光应用系统优化设计具有重要意义。

### 参考文献:

- [1] Ji Xiaoling, Li Xiaoqing. The far-field divergence angle and the far-field radiant intensity distribution of Gaussian Schell-model array beams [J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(7): 4624-4629. (in Chinese)  
季小玲, 李晓庆. 高斯-谢尔模型阵列光束的远场发散角和远场辐射强度[J]. 物理学报, 2009, 58(7): 4624-4629.
- [2] Tian Baogang, Zhu Wenyue, Rao Ruizhong, et al. Research progress on propagation of laser array beams in turbulent atmosphere [J]. Journal of Atmospheric and Environmental Optics, 2013, 8(2): 81-90. (in Chinese)  
田宝刚, 朱文越, 饶瑞中, 等. 阵列合成激光束在湍流大气中传输的研究进展 [J]. 大气与环境光学学报, 2013, 8(2): 81-90.
- [3] Shao Xiaoli, Ji Xiaoling. Effective radius of curvature of rectangular Gaussian Schell-model array beams [J]. High Power Laser and Particle Beams, 2011, 2(7): 1799-1804. (in Chinese)  
邵晓利, 季小玲. 矩形分布高斯-谢尔模型阵列光束的等效曲率半径[J]. 强激光与粒子束, 2011, 2(7): 1799-1804.
- [4] Li Changjin, Luo Yamei. Propagation properties of nonparaxial Hermite-Gaussian multiple radial array beams [J]. Infrared and Laser Engineering, 2013, 42(S1): 111-117. (in Chinese)  
黎昌金, 罗亚梅. 非傍轴厄米-高斯光束多重径向阵列光束的传输特性[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(S1): 111-117.

- [5] Cai Y, Chen Y, Eyyuboğlu H T, et al. Propagation of laser array beams in a turbulent atmosphere [J]. *Appl Phys B*, 2007, 88: 467-475.
- [6] Haiyan Wang, Xiangyin Li. Propagation properties of radial partially coherent flat-topped array beams in a turbulent atmosphere[J]. *Opt Commun*, 2010, 283: 4178-4189.
- [7] Lv Baida, Ma Hong. Beam propagation properties of radial laser arrays[J]. *Opt Soc Am A*, 2005, 17(11): 2005-2009.
- [8] Baykal Y, Eyyuboglu H T, Cai Y. Scintillations of partially coherent multiple Gaussian beams in turbulence [J]. *Appl Opt*, 2009, 48(10): 1943-1954.
- [9] Xiang Ningjing, Wu Zhensen, Wang Mingjun. Spreading and wander of Gaussian-Schell model beam propagation through atmospheric turbulence [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(3): 658-662. (in Chinese)  
向宁静, 吴振森, 王明军. 部分相干高斯-谢尔光束在大气湍流中的展宽与漂移[J]. *红外与激光工程*, 2013, 42(3): 658-662.
- [10] Ricklin J C, Davidson F M. Atmospheric turbulence effects on a partially coherent Gaussian beam; implications for free-space laser communication[J]. *J Opt Soc Am A*, 2002, 19(9): 1794-1802.
- [11] Du X, Zhao D, Korotkova O. Changes in the statistical properties of stochastic anisotropic electromagnetic beams on propagation in the turbulent atmosphere [J]. *Opt Express*, 2007, 15(25): 16909-15.
- [12] Wei Lu, Li Renliu, Sun Jianfeng, et al. Change in degree of coherence of partially coherent electromagnetic beams propagating through atmospheric turbulence [J]. *Opt Commun*, 2007, 271: 1-8.
- [13] Mandel L, Wolf E. *Optical Coherence and Quantum Optics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. (in Chinese)