大气斜程传输中高阶贝塞尔高斯光束轨道角动量的研究

柯熙政,郭新龙

(西安理工大学 自动化与信息工程学院,陕西 西安 710048)

摘 要: 大气湍流引起大气折射率随机变化, 导致空间不均匀性。高阶贝塞尔光束在大气湍流中传输时, 空间不均匀性会使光子波函数改变,形成不同的光子态引起轨道角动量的弥散。在 Rytov 近似下,计算了高阶贝塞尔光束在大气斜程传输中各分量所占光束总能量的权重。讨论并对比折射率结构常数,光束波长,天顶角,轨道角动量数,接收孔径和光斑大小等参数对螺旋谱的影响,并给予相应的物理解释。结果表明:随着折射率结构常数,天顶角和传输距离的增加以及光束波长的减小,螺旋谐波主分量对应的谱减小,轨道角动量弥散越大,而且望远镜接收孔径和光斑大小对轨道角动量弥散的影响非常小。

关键词: 高阶贝塞尔高斯光束; 大气湍流; 轨道角动量; 螺旋谱

中图分类号: TN929.12 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)12-3744-06

Orbital angular momentum research of high order Bessel Gaussian beam in a slant atmosphere turbulence

Ke Xizheng, Guo Xinlong

(The Faculty of Automation and Information Engineering, Xi′an University of Technology, Xi′an 710048, China)

Abstract: Atmospheric turbulence can cause random variations of the refractive index, resulting in a spatial inhomogeneity. When a high order Bessel Gaussian beam is propagating through the atmospheric turbulence, spatial inhomogeneity can bring about the change of photon wave function that causes the disperse of the orbital angular momentum to form different photon states. Under the Rytov approximation, when the high order Bessel beam was propagating in a slant-path atmospheric turbulence, the weight of the spiral harmonic component of the beam energy was calculated. And then, the impact on the spiral spectrum of the beam propagating in the slant ways, caused by refractive index structure constant, the wavelength of the beam, the zenith, orbital angular momentum, the receiver aperture, spot size were discussed and compared and a series of concrete explanations were given. The research results show that with increasing refractive index structure constant and the zenith and with decreasing wavelength of the beam, the spectrum of the spiral harmonic main component reduces and the orbital angular momentum disperses more serious. The receiver aperture and spot size have little effect on the orbital angular momentum disperse.

收稿日期: 2015-04-05; **修订日期:** 2015-05-10

基金项目: 国家自然科学基金(61377080, 60977054,61271110);陕西省“13115”科技统筹计划(2011KTCQ01-31);陕西省教育厅产业化培育基金(2010JC17);西安市科技成果转换基金(CX12165);陕西省自然科学基础研究计划(2013JQ8011);陕西省教育厅科研计划项目(2013JK1104);陕西省工业攻关科技计划项目(2013K06-08)和江苏省省级前瞻性研究专项资金(BE201308)

作者简介: 柯熙政(1962-),男,教授,主要从事无线激光通信方面的研究。Email: xzke@263.net

Key words: high order Bessel Gaussian beam; atmospheric turbulence; orbital angular momentum; spiral spectrum

0 引 言

贝塞尔高斯光束(Bessel-Gaussian Beam,BGB)自 Durnin[1]在 1987 年提出以来,由于其无衍射性一直受到人们的关注,由于理论上贝塞尔函数的平方不可积,所以 BGB 无法实现,因此实际中获得的所谓的“无衍射光束”是经过强度调制的贝塞尔高斯光束。Greenne[2]从理论上研究了 BGB 的衍射特性,Hakkaraine 等[3]利用二极管抽运激光器从实验上调制产生了 BGB 光束和脉冲。J.A.Davis 等人 1996 年提出,场分布具有高阶贝塞尔函数的光束也是无衍射光束[4]。无衍射光束(non-diffracting beams)的特点是光束在自由空间传播时,与传播方向垂直的每个平面上的光场分布总是保持不变,即光束中电场强度的横向分布很集中,此类光场不会受到衍射扩展的影响。某些类型的无衍射光具有轨道角动量,基于无衍射光在自由空间传播过程中一定范围内横向强度分布保持不变的光场,具有方向性好以及传输距离远等特点,研究无衍射光束的基本原理、产生方法及其传输特性,通过具有轨道角动量的无衍射光束来进行空间光信息传输的编码解码,可保证激光大气通信的安全性[5-7]。柯熙政[8-9]等人研究了拉盖高斯光束在大气斜程传输中时轨道角动量的变化规律和单球粒子对涡旋光束的散射规律。由于涡旋光束带有轨道角动量,在微观粒子操纵、材料加工等方面也有广泛的应用[10-11]。

文中根据 2001 年国际电信联盟颁布的随高度变化的 ITU-R 大气结构常数模型,讨论了大气传输中高阶 BGB 光束受湍流介质干扰导致 OAM 弥散,文中由螺旋谱的定义计算了螺旋谱波各分量所占光束总能量的权重,分析了高阶 BGB 光束在湍流介质中 OAM 的变化规律和影响因素,并给出了相应的解释。

1 理论分析

理想的沿 z 轴传播单色空间相干无衍射光束的复振幅可以描述为如下形式[12]:

$$U(x,y,z,t)=u(x,y)\exp[i(\omega t-\beta z)] \tag{1}$$

式中:u,ω,β 分别描述横向幅值分布、角频率和角波数。缓慢变化的幅值 u 与 z 坐标无关,因此光束在与 z 轴垂直的任一平面上的横向电场分布是完全保持不变的。公式(1)描述的场通常是在线性或非线性光学材料中传输的波导模或空间孤子,对于理想的沿 z 轴传播的单色空间相干无衍射光束在自由空间中传播时,与时间无关的幅值:

$$a(x,y,z)=u(x,y)\exp(-i\beta z) \tag{2}$$

必须满足 Helmholtz 方程:

$$(\nabla^2+k^2)a(x,y,z)=0 \tag{3}$$

式中:$k=\omega/c$,c 是真空中的光速。无衍射光可以很容易的分解为具有相位因子 $\exp(il\theta)$的拉盖-高斯光束或贝塞尔-高斯光束的形式,角向相位函数 $\Phi(\varphi)=l\varphi$,因此每光子角动量为。经过准直的 n 阶 BGB 在光源处的横向光强分布可以表示为:

$$u(r,\theta,0)=J_n(\beta r)\exp(-in\theta)\exp(-\frac{r^2}{\omega_0^2}) \tag{4}$$

式中:J_n 为 n 阶贝塞尔函数;β 为波矢的横向分量;n 为阶数。n 阶贝塞尔高斯光束在大气湍流中传输,在 Rytov 近似下,复振幅可描述为:

$$u(r,\theta,z)=J_n(\beta r)\exp(-in\theta)\exp(-\frac{r^2}{\omega_0^2})\exp(-i\beta z)\exp[\psi(r,\theta,z)] \tag{5}$$

式中:$\psi(r,\theta,z)$为大气湍流引入的复相位。在经典光学的角度分析了 n 阶 BGB 光束经过大气湍流时 OAM 的成分,在螺旋谱的定义出发计算螺旋谱波分量所占光束总能量的权重,进而分析 n 阶 BGB 光束在湍流介质中 OAM 的变化规律和影响因素。在湍流介质中的 n 阶 BGB 光束的复振幅 $u\ (r,\theta,z)$ 用螺旋谱波函数 $\exp(il\theta)$展开,得到:

$$u(r,\theta,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{+\infty}a_l(r,z)\exp(il\theta)$$

式中:$a_l(r,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}u(r,\theta,z)\exp(-il\theta)\mathrm{d}\theta$,$l$ 表示螺旋谱波的 OAM 指数为 l。

光束的能量为:

$$U=2\varepsilon_0\sum_{-\infty}^{+\infty}c_l$$

式中：$c_l=\int_0^{\infty}|a_l(r,z)|^2 r\mathrm{d}r$；$\varepsilon_0$ 为真空介电常数。

采用 Rytov 相位结构函数的二次近似后$\langle\exp[\psi(r_1,z)+\psi^*(r_2,z)]\rangle$可以写为：

$$\langle\exp[\psi(r_1,z)+\psi^*(r_2,z)]\rangle=\exp[-\frac{1}{2}D_\psi(r_1-r_2)]=\exp[-\frac{r_1^2+r_2^2-2|r_1||r_2|\cos(\theta_1-\theta_2)}{r_0^2}] \tag{6}$$

式中：D_ψ 为相位结构函数；$r_0=(1.46k^2\int_0^L C_n^2(z)(1-\frac{z}{L})^{5/3}\mathrm{d}z)^{-3/5}$ 是斜程路径上湍流介质中球面波的相干长度；$C_n^2(z)$ 为大气斜程路径上的折射率结构常数。文中采用 2001 年国际电信联盟提出的随高度变化的 ITU-R 大气结构常数模型[13]，即

$$C_n^2(z\cos\alpha)=8.148\times10^{-56}v^2(z\cos\alpha)10\exp(-z\cos\alpha/1000)+2.7\times10^{-16}\exp(-z\cos\alpha/1500)+C_n^2(0)\exp(-z\cos\alpha/100) \tag{7}$$

式中：v=2.1 m/s 为根均方风速；$C_n^2(0)$为近地面折射率结构常数；α 为天顶角。利用积分公式：

$$\int_0^{2\pi}\exp[-in\theta_1+\eta\cos(\theta_1-\theta_2)]\mathrm{d}\theta_1=2\pi\exp(-in\theta_2)I_n(\eta) \tag{8}$$

式中：$I_n(\eta)$为修正的 n 阶贝塞尔函数。

由公式(4)、(5)、(6)、(8)可得，OAM 指数为 l 的螺旋谐波的 C_l 为：

$$C_l=\int_0^R|a_l(r,z)|^2 r\mathrm{d}r=\frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle u(r,\theta_1,z)u^*(r,\theta_2,z)\rangle\exp(-il\theta_1)\exp(il\theta_2)\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^R J_m(\beta r)J_m(\beta r)^*\exp\left(-\frac{2r^2}{\omega(z)^2}-\frac{2r^2}{\rho_0^2}\right)I_{(m+l)} \tag{9}$$

式中：R 为光束的接收孔径。螺旋谱为 $P=C_l/\Sigma C_l$，它表示光束展为不同 OAM 的各螺旋谐波的能量占光束总能量的权重。

2 数值分析

近地面折射率结构常数 $C_n^2(0)$，入射光的 OAM 指数 m，光波波长 λ，束腰光斑大小 w_0，接收孔径 R，天顶角 α 和传输距离 z，这些因素对螺旋谱有什么影响，为了分析清楚各因素的对螺旋谱的影响，需要逐一计算分析。

(1)分析大气湍流近地面折射率结构常数 $C_n^2(0)$和传输距离 z 对螺旋谐波主分量对应谱的影响，取光波波长 λ=632 nm，光斑大小 w_0=1 cm，接收孔径 R=0.105 m，天顶角 $\alpha=\pi/3$，传输距离 z 为 0~10 000 m，入射光的 OAM 指数 m=4。

图 1 中 $l=m$ 的螺旋谱随着传输距离 z 的增加逐渐减小，可知 OAM 指数为 m 的入射光经过大气湍流传输后 OAM 已经发生了弥散，而且传输的距离 z 越大，OAM 发散的越强烈。由图 1 对比中可以看出近地面高阶贝塞光束传输相同距离，折射率结构常数 $C_n^2(0)$越大，OAM 发散的越强烈。而且由 $l=m$ 的螺旋谱分量随传输距离 z 变化的曲线可以看出：函数曲线在最开始的时候曲率最大，然后曲率渐渐变小，曲线趋向平缓，说明在大气斜程传输过程中，最开始的时候 OAM 发散速度最快，往后 OAM 的发散速度渐渐变缓。这是因为大气折射率结构常数受高度影响，根据公式(7)，近地面折射率结构常数最大，越往高处，大气折射率结构常数越小，所以对高阶 BGB 的 OAM 影响越小，OAM 发散速度变缓。

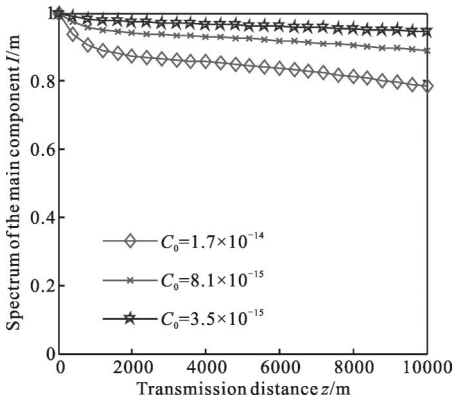

图 1 在不同的折射率结构常数下，螺旋谐波主分量谱随传输距离的分布

Fig.1 With different refractive constant, the distribution of spiral spectrum of the spiral harmonic main component with the transmission distance

(2)分析光波波长 λ 随传输距离 z 变化对螺旋谐波主分量对应谱的影响。

取光斑大小 w_0=1 cm，接收孔径 R=0.105 m，近地面折射率结构常数 $C_n^2(0)=1.71\times0^{-14}m^{-2/3}$，天顶角 $\alpha=\pi/3$，传输距离 z 为 0~10 000 m，入射光的 OAM 指数

$m=4$。图 2 中在波长 $\lambda=351$ nm、$\lambda=632$ nm 和 $\lambda=1\,310$ nm,同样传输距离下,随着光波波长的变大,$l=m$ 螺旋谱变大,高阶贝塞光束的 OAM 弥散减小。光波波长越短,OAM 弥散的越强烈,光波波长越长,在大气湍流中携带的 OAM 信息越稳定,OAM 多路复用时,引起的码间串扰较小。所以在利用 OAM 进行大气通信时,为了减小 OAM 弥散的程度,应当选取波长较长的入射光。

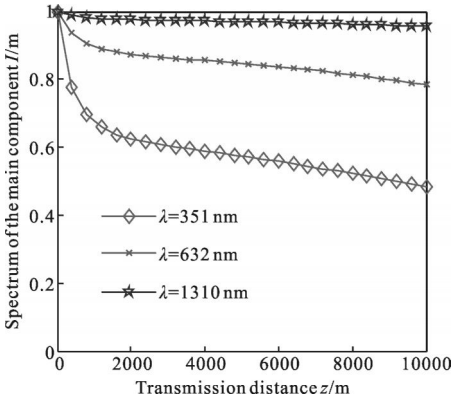

图 2 在不同波长下,螺旋谱波主分量谱随传输距离的分布

Fig.2 With different wavelengths of the beam, the distribution of spiral spectrum of the spiral harmonic main component with the transmission distance

(3) 分析接收孔径随传输距离 z 变化对螺旋谱波主分量对应谱的影响。选取实验室具备的望远镜 $D=30$ mm 马卡望远镜 $F=1\,365$ mm,$D=105$ mm 和 CELESTRON 星特朗公司生产的 Nexstar8SE 系列的接收天线,$FL=2\,000$ mm,接受孔径为 203 mm 的接收天线对螺旋谱影响进行分析。取光波波长 $\lambda=632$ nm,光斑大小 $w_0=1$ cm,近地面折射率结构常数 $C_n^2(0)=1.7\times10^{-14}\,m^{-2/3}$,天顶角 $\alpha=\pi/3$,传输距离 z 为 0~10 000 m,入射光的 OAM 指数 $m=4$。

图 3 中随着传输距离的增加 OAM 弥散增强,传输相同的距离,不同接收孔径 $R=0.105$ m、$R=0.203$ m 和 $R=0.365$ m 下的 $l=m$ 螺旋谱的减小规律是一样的。这是由于有限孔径近似可显现出理想无衍射光束的主要特性,光束强度随传播距离的增大而变化不大,横截面发生衍射扩散很小。所以接收孔径的不同对高阶贝塞尔高斯光束 OAM 的弥散程度影响是很小的。所以在携带 OAM 的高阶贝塞尔高斯光束在斜程传输中,可以忽略接收孔径对 OAM 弥散的影响。

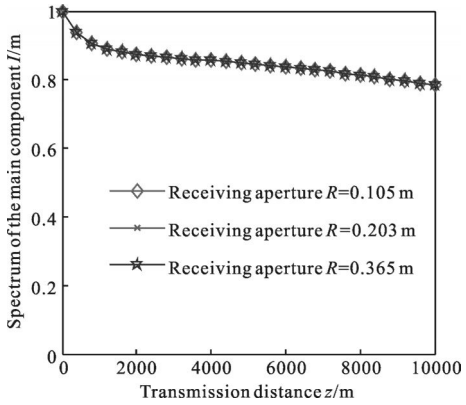

图 3 在不同的接收孔径下,螺旋谱波主分量谱随传输距离的分布

Fig.3 With different receiving apertures, the distribution of spiral spectrum of the spiral harmonic main component with the transmission distance

(4) 分析入射光 OAM 指数 m 和传输距离 z 对螺旋谱波主分量对应谱的影响,取光波波长 $\lambda=632$ nm,光斑大小 $w_0=1$ cm,接收孔径 $R=0.105$ m,近地面折射率结构常数 $C_n^2(0)=1.7\times10^{-14}\,m^{-2/3}$,传输距离 z 为 0~10 000 m,天顶角 $\alpha=\pi/3$。

图 4 中在不同的 OAM 指数下,$l=m$ 的螺旋谱随着传输距离的增大开始不同程度的减小,OAM 开始了弥散。在贝塞尔高斯光束阶数 $m=4$,$m=12$ 和 $m=20$ 下,传输相同距离下,贝塞尔高斯光束的阶数越大,即入射光 OAM 指数增大,$l=m$ 螺旋谱 OAM 弥散越弱。在 $m=4$~12 这个区间内 OAM 弥散的程度差别很大,从 $m=12$~20 这个区间随着阶数的变化,OAM 弥散变化很小,最后不同阶数的贝塞尔高斯

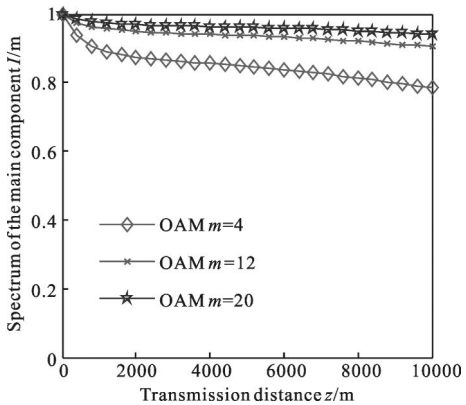

图 4 不同的轨道角动量下,螺旋谱波主分量谱随传输距离的分布

Fig.4 With different OAM modes, the distribution of spiral spectrum of the spiral harmonic main component with the transmission distance

光束的 OAM 弥散随着传输距离的变大而趋向稳定。这有助于选取合适的贝塞尔高斯光束的阶数，让 OAM 弥散程度较小，实现 OAM 信道信息的可靠传输。

(5) 分析天顶角 α 和传输距离 z 对螺旋主分量对应谱的影响如图 5 所示。取光波波长 λ=632 nm，光斑大小 w_0=1 cm，接收孔径 R=0.105 m，近地面折射率结构常数 $C_n^2(0)=1.7\times10^{-14}\,m^{-2/3}$，传输距离 z 为 0~10 000 m，入射光的 OAM 指数 m=4。

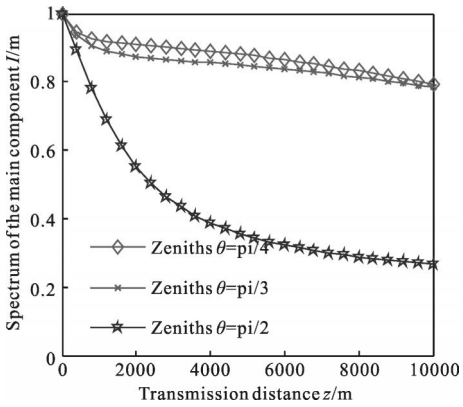

图 5 在不同的天顶角下，螺旋谐波主分量对应谱的分布

Fig.5 With different zeniths, the distribution of spiral spectrum of the spiral harmonic main component with the transmission distance

由图 5 可以看出，天顶角在 0~π/2 的范围内，天顶角越大，OAM 弥散的越强烈。由于天顶角越大，通信信道越接近于水平地面，由 ITU-R 颁布的大气结构常数模型可知：大气折射率结构常数随高度变化的过程中，位置越低，大气折射率结构常数越大。所以大气信道越偏向水平地面，大气折射率结构常数越大，OAM 弥散的越强烈。当天顶角 $\alpha=\pi/2$ 的情况，即光束在大气信道中水平传输，随着传输距离增加，OAM 弥散的越强烈。

(6) 分析光斑大小 w_0 对螺旋谐波主分量对应谱的影响。取光波波长 λ=632 nm，接收孔径 R=0.105 m，近地面折射率结构常数 $C_n^2(0)=1.7\times10^{-14}\,m^{-2/3}$ 传输距离 z 为 0~10 000 m，天顶角 $\alpha=\pi/3$，入射光的 OAM 指数 m=4。

在光斑大小为 w_0=1 cm，w_0=3 cm，w_0=5 cm 的三种情况下，三种螺旋谐波主分量对应谱的大小近似，如图 6 所示，说明光斑大小 w_0 对螺旋谱的影响非常小。

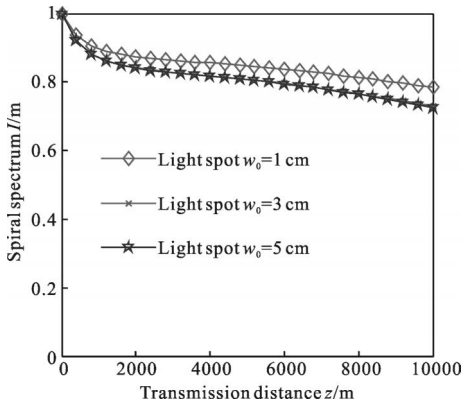

图 6 在不同的光斑大小下，螺旋谐波主分量对应谱的分布

Fig.6 With different incident light spot sizes, the distribution of spiral spectrum of the spiral harmonic main component with the transmission distance

3 结 论

无衍射光束在空间传输时的衍射度很小，光束中心斑直径保持不变的无衍射传播距离远大于相应初始半径高斯光束的传播距离。分析了高阶 BGB 经大气斜程传输（天顶角在 0~π/2 范围内）后，对其 OAM 弥散的影响因素，分析影响因素

得出结论：(1) 近地面折射率结构常数越大，OAM 弥散的越强烈。(2)光波波长越短，OAM 弥散的越强烈。(3)随着高阶贝塞尔高斯光束阶数增大，OAM 弥散变弱，但入射光阶数增大到一定程度，OAM 弥散变化很小，大气湍流对其 OAM 的影响趋向稳定。(4) 天顶角在 0~π/2 的范围内取值越大，OAM 发散的越强烈。(5)光斑大小 w_0 和接收孔径 R 对光束 OAM 弥散影响很小。(6) 传输距离越大，OAM 弥散越强。以上研究规律对选择合适的波长、天顶角、接收孔径和 OAM 指数，减小大气湍流对高阶 BGB 光束 OAM 弥散程度，以便于携带 OAM 的高阶贝塞尔高斯光束的信息传输时，OAM 信道信息码元间影响较小，这对于 OAM 信息高效可靠的信息传输很有意义。在积极做相关准备，计划通过实验来验证文章的所得结论，并在另一篇文章中说明。

参考文献：

[1] Durnin J, Miceli J J, Eberly Jr J H. Diffraction-free beam [J]. ***Phys Rev Lett***, 1987, 58(13): 1499-1501.

[2] Greene P L. Properties and diffraction of vectorBessel-Gauss

beams[J]. ***J Opt Soc Am A***, 1998, 15(12): 3020-2027.

[3] Hakkaraine T, Hakola A, Jalava J, et al. Generation of Bessel-Gauss beams and pulses with diode-pumped Nd: $GdVO_4$ laser [R]. Optics and Molecular Material. Helsinki University of Technology, 2007.

[4] Davis J A, Carcole E, Cottrell D M. Intensity and phase measurement of nondiffracting beams generated with a magneto-optic spatial light modulator [J]. ***Appl Opt***, 1996, 35(4): 593-598.

[5] Li Y, Platzer H. An experimental investigation of diffraction patterns in low-Fresnel-number focusing systems [J]. ***Opt Acta***, 1983, 30(11): 1624-1643.

[6] Herman R M, Wiggins T A. Production and uses of diffractionless beams [J]. ***J Opt Soc Am A***, 1991, 8: 932-942.

[7] Muys P, Vanclamme E. Direct generation of bessel beams[J]. ***Appl Opt***, 2002, 41(30): 6375-6379.

[8] Lü Hong, Ke Xizheng. Scattering of a beam with orbital angular momentum by a single sphere [J]. ***Acta Phys Sin***, 2009, 58(12): 8302-8308. (in Chinese)
吕宏, 柯熙政. 具有轨道角动量光束入射下的单球粒子散射研究[J].物理学报, 2009, 58(12): 8302-8308.

[9] Ke Xizheng, Chen Juan, Yang Yiming. Study on orbital angular momentum of Laguerre-Gaussian beam in a slant-path atmospheric turbulenc[J]. ***Acta Phys Sin***, 2014: 150301. (in Chinese)
柯熙政, 谌娟, 杨一明. 在大气湍流斜程传输中拉盖高斯光束的轨道角动量的研究[J]. 物理学报, 2014: 150301.

[10] Tatarkova S A, Sibbett W, Dholakia K. Brow-nian particle in an optical potential of the washboard type [J]. ***Phys Rev Lett***, 2003, 91(3): 1-4.

[11] Verbeeck J, Tian H, Schattschneider P. Production and application of electron vortex beams [J]. ***Nature***, 2010, 467 (7313): 301-304.

[12] Durnin J E, Jr J M, Eberly J H. Diffraction-free beams[J]. ***Phys Rev Lett***, 1987, 58(15): 1499-1501.

[13] ITU-R Document 3J/31-E. On propagation data and prediction methods required for the design of space-to-earth and earth to-space optical communication systems[C]//Radio-Communication Study Group Meeting, 2001, 7: 277-293.