

## 一种空间激光通信中模拟湍流效应的新方法

向劲松, 张明杰

(重庆邮电大学 通信与信息工程学院, 重庆 400065)

**摘要:** 大气湍流一直是限制空间激光通信的主要因素。提出了一种模拟大气湍流效应的新方法, 在接收端用一对相关的幅度屏与相位屏来模拟大气湍流效应。针对星到地的激光通信, 论文先将二重积分形式的幅度自相关、相位自相关以及幅度-相位互相关函数简化为一重积分的形式; 然后根据这三种相关函数, 基于协方差随机屏模拟方法同时产生一对相关的随机幅度屏与相位屏; 并比较了模拟屏的结构函数与理论结构函数的符合度。该方法可有效模拟湍流内、外尺度对湍流效应的影响。

**关键词:** 大气光学; 大气传播; 大气湍流; 幅度屏; 相位屏

**中图分类号:** TN012; TN929.12    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1007-2276(2015)09-2721-05

## A new method of simulation turbulent effects for space laser communication

Xiang Jinsong, Zhang Mingjie

(School of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

**Abstract:** Atmospheric turbulence is a mainly factor which restricts space laser communication. In this paper, a new turbulence simulation method was proposed. At the receiving position, a pair of correlated amplitude and phase screens was used to simulate the turbulent effects. For the situation of satellite to ground laser communication, firstly, the double infinite integral forms of the amplitude autocorrelation, phase autocorrelation and amplitude-phase cross-correlation functions were reduced to the forms of single integral; and then, according to these correlation functions, a pair of correlated amplitude and phase screens was simulated by using the covariance-based random screen simulation method. The conformities between the simulated structure functions and the theoretical ones were compared. The outer scale and inner scale of atmospheric can be considered in this simulation method.

**Key words:** atmospheric optics; atmospheric propagation; atmospheric turbulence; amplitude screen; phase screen

收稿日期: 2015-01-05; 修订日期: 2015-02-03

基金项目: 国家自然科学基金(61371096, 61275077); 重庆市教委科学技术研究(KJ130515)

作者简介: 向劲松(1975-), 男, 副教授, 博士, 主要从事空间光通信的研究。Email: xiangjs@cqupt.edu.cn

## 0 引言

长期以来,大气湍流一直是限制空间激光通信系统,成像系统等光学系统性能的主要因素,如何快速、精确的模拟大气湍流效应对研究空间尤其星地间的激光通信十分重要。在研究空间光通信问题时,除实验和理论分析的方法外,数值模拟也是一种非常有效的研究手段。到目前为止,已发展了多种随机相位屏的数值模拟方法:FFT 功率谱反演法<sup>[1]</sup>;Zernike 正交多项式展开法<sup>[2]</sup>;基于协方差函数的方法<sup>[3-4]</sup>等。这些模拟方法都只考虑湍流引起的相位畸变,而忽略了幅度畸变。若要考虑幅度畸变,一般要通过多相位屏的模拟方法<sup>[5]</sup>,即在激光空间传输路径上,放置几十个相位屏,基于菲涅耳衍射原理,激光从第一个相位屏进去,从最后一个相位屏出来的光波的振幅及相位都会有湍流引起的畸变。但这种多相位屏模拟方法存在一些缺陷:一、需要模拟激光在几十个相位屏之间的传输,速度很慢;二、模拟相位屏的尺寸一般需远大于传输光束尺寸,导致速度进一步变慢且对存储容量的需求变大。

一种可行的模拟方法是在接收端用一对随机幅度屏与相位屏来直接模拟由湍流引起的幅度及相位畸变。参考文献[6]基于功率谱反演法,在接收端模拟一对随机幅度屏与相位屏,但是此方法没能考虑到幅度与相位之间的相关性。参考文献[7]在弱湍流情况下,提出了一种用功率谱反演法在接收端模拟一对相关的随机幅度屏与相位屏的模拟方法。其原理为:由幅度、相位的自相关函数及幅度-相位的互相关函数经傅里叶变换得到其自、互相关功率谱,然后基于傅立叶序列由功率谱模拟一对相关的随机幅度屏与相位屏。参考文献[8]在参考文献[7]的基础上研究了扩展光源及多光束发射时接收端幅度屏及相位屏的模拟问题。这类模拟方法考虑了幅度屏与相位屏之间的相关性。但其功率谱模型中未能体现大气湍流内、外尺度参数对模拟精度的影响。

针对星地间的激光通信,文中先将二重积分形式的幅度自相关数、相位自相关函数及幅度-相位互相关函数化简为一重积分形式。然后采用类似于协方差随机相位屏模拟的方法,提出一种在地面接收端用一对相关的幅度屏与相位屏来模拟星地间大气湍流效应的模拟方法,与参考文献[7-8]的方法相

比,文中方法能更准确地体现湍流内、外尺度的影响。

## 1 湍流下光波幅度与相位的相关函数

文中提出的方法只适用于弱湍流情况,利用 Von Karman 大气湍流模型,光波幅度、相位的自相关及幅度-相位的互相关函数表示如下<sup>[7,9]</sup>:

$$B_x(r) = \frac{2\pi^2}{\cos\varphi} \times 0.033k^2 \int_0^\infty dh \cdot C_n^2(h) \int_0^\infty (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6} \cdot \kappa \cdot J_0(\kappa r) \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{h}{k \cos\varphi} \kappa^2\right)\right] d\kappa \quad (1)$$

$$B_s(r) = \frac{2\pi^2}{\cos\varphi} \times 0.033k^2 \int_0^\infty dh \cdot C_n^2(h) \int_0^\infty (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6} \cdot \kappa \cdot J_0(\kappa r) \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) \left[1 + \cos\left(\frac{h}{k \cos\varphi} \kappa^2\right)\right] d\kappa \quad (2)$$

$$B_{xs}(r) = \frac{2\pi^2}{\cos\varphi} \times 0.033k^2 \int_0^\infty dh \cdot C_n^2(h) \int_0^\infty (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6} \cdot \kappa \cdot J_0(\kappa r) \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{k \cos\varphi} \kappa^2\right) d\kappa \quad (3)$$

式中: $B_x$ 和 $B_s$ 分别代表幅度、相位的自相关函数; $B_{xs}$ 代表幅度-相位的互相关函数; $C_n^2$ 代表折射率的结构常数; $J_0$ 为贝塞尔函数; $\varphi$ 代表天顶角; $k=2\pi/\lambda$ 代表空间波数; $\lambda$ 代表光波的波长; $\kappa_0=2\pi/L_0$ 与 $\kappa_m=2\pi/l_0$ , $l_0$ 和 $L_0$ 分别代表大气湍流内、外尺度。

在研究星地间的大气湍流效应时,常采用 Hufnagel Valley 折射率的结构常数模型<sup>[10]</sup>:

$$C_n^2(h) = 5.94 \times 10^{-53} (W/27)^2 h^{10} \exp(-h/1000) + 2.7 \times 10^{-16} \exp(-h/1500) + A \exp(-h/100) \quad (4)$$

式中: $A$ 表示地面附近的折射率结构常数; $W$ 为风速;常用的值是 $A=1.7 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ , $W=21 \text{ m/s}$ ,即 Hufnagel Valley 5/7 折射率结构常数模型。

由公式(1)~(3)幅度、相位的自相关函数及幅度-相位的互相关函数知,表达式都是二重积分,要想直接计算出各点的自、互相关函数值是不易的。为了快速、精确的计算各点的自、互相关函数值,将公式(1)~(3)中的二重积分化简为一重积分,则有关 $h$ 部分的积分表示如下:

$$\int_0^\infty C_n^2(h) \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\frac{h}{k \cdot \cos\varphi} \kappa^2\right) \\ 1 + \cos\left(\frac{h}{k \cdot \cos\varphi} \kappa^2\right) \\ \sin\left(\frac{h}{k \cdot \cos\varphi} \kappa^2\right) \end{pmatrix} dh \quad (5)$$

将公式(4)代入公式(5)中,并利用下式<sup>[11]</sup>:

$$\int_0^\infty x^{a-1} \exp(-px) \left( \frac{\sin(bx)}{\cos(bx)} \right) dx = \frac{\Gamma(a)}{(b^2+p^2)^{a/2}} \left( \frac{\sin(c)}{\cos(c)} \right)$$

$$c = a \cdot \arctan(b/p) \quad (6)$$

则公式(5)可被化简为如下 3 个部分:

$$\begin{pmatrix} T1_x \\ T1_s \\ T1_{x^s} \end{pmatrix} = \int_0^\infty A_1 h^{10} \exp\left(-\frac{h}{1000}\right) \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\frac{\kappa^2}{k \cos \varphi} h\right) \\ 1 + \cos\left(\frac{\kappa^2}{k \cos \varphi} h\right) \\ \sin\left(\frac{\kappa^2}{k \cos \varphi} h\right) \end{pmatrix} dh =$$

$$\begin{pmatrix} 10^{33} A_1 \Gamma(11) \\ 10^{33} A_1 \Gamma(11) \\ 0 \end{pmatrix} + A_1 \Gamma(11) \left( 1000^{-2} + \frac{\kappa^4}{(k \cdot \cos \varphi)^2} \right)^{-11/2} \times$$

$$\begin{pmatrix} -\cos\left[ 11 \cdot \arctan\left(\frac{1000 \kappa^2}{k \cos \varphi}\right) \right] \\ +\cos\left[ 11 \cdot \arctan\left(\frac{1000 \kappa^2}{k \cos \varphi}\right) \right] \\ \sin\left[ 11 \cdot \arctan\left(\frac{1000 \kappa^2}{k \cos \varphi}\right) \right] \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} T2_x \\ T2_s \\ T2_{x^s} \end{pmatrix} = \int_0^\infty A_2 \exp\left(-\frac{h}{1500}\right) \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\frac{\kappa^2}{k \cos \varphi} h\right) \\ 1 + \cos\left(\frac{\kappa^2}{k \cos \varphi} h\right) \\ \sin\left(\frac{\kappa^2}{k \cos \varphi} h\right) \end{pmatrix} dh =$$

$$\begin{pmatrix} 1500 A_2 \\ 1500 A_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A_2}{(1500)^{-2} + \left(\frac{\kappa^2}{k \cos \varphi}\right)^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{1500} \\ \frac{1}{1500} \\ \frac{\kappa^2}{k \cos \varphi} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} T3_x \\ T3_s \\ T3_{x^s} \end{pmatrix} = \int_0^\infty A_3 \exp\left(-\frac{h}{100}\right) \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\frac{\kappa^2}{k \cos \varphi} h\right) \\ 1 + \cos\left(\frac{\kappa^2}{k \cos \varphi} h\right) \\ \sin\left(\frac{\kappa^2}{k \cos \varphi} h\right) \end{pmatrix} dh =$$

$$\begin{pmatrix} 100 A_3 \\ 100 A_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A_3}{(100)^{-2} + \left(\frac{\kappa^2}{k \cos \varphi}\right)^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{100} \\ \frac{1}{100} \\ \frac{\kappa^2}{k \cos \varphi} \end{pmatrix} \quad (9)$$

式中:  $A_1 = 5.94 \times 10^{-53} \times (21/27)^2$ ,  $A_2 = 2.7 \times 10^{-16}$ ,  $A_3 = 1.7 \times 10^{-14}$ 。

由公式(7)~(9)得,公式(1)~(3)可以被化简为一

重积分形式表示如下:

$$B_x(r) = \frac{2\pi^2}{\cos \varphi} \times 0.033 k^2 \int_0^\infty d\kappa \cdot \kappa (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6} \cdot$$

$$J_0(\kappa r) \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) (T1_x + T2_x + T3_x) \quad (10)$$

$$B_s(r) = \frac{2\pi^2}{\cos \varphi} \times 0.033 k^2 \int_0^\infty d\kappa \cdot \kappa (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6} \cdot$$

$$J_0(\kappa r) \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) (T1_s + T2_s + T3_s) \quad (11)$$

$$B_{x^s}(r) = \frac{2\pi^2}{\cos \varphi} \times 0.033 k^2 \int_0^\infty d\kappa \cdot \kappa (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6} \cdot$$

$$J_0(\kappa r) \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) (T1_{x^s} + T2_{x^s} + T3_{x^s}) \quad (12)$$

由公式(10)~(12)可知,幅度、相位的自相关与幅度-相位的互相关函数为一重积分,其相关函数值可以很容易地由数值积分得出。

## 2 模拟一对相关的幅度屏与相位屏

由各点的相关函数值,根据协方差函数的方法模拟一对相关的二维幅度屏与相位屏,其整个模拟过程如下:

首先,采用固定步长  $\Delta = D/N$ ,对传输光束中的幅度与相位两个参数分别进行采样。这里  $D$  表示模拟屏的尺寸, $N$  表示在  $X$  与  $Y$  垂直方向上的采样数目。由此可以构造出两个相关的二维幅度屏与相位屏。每一个屏中有  $N \times N$  个采样点,共有  $2N^2$  个采样点,如图 1 所示。

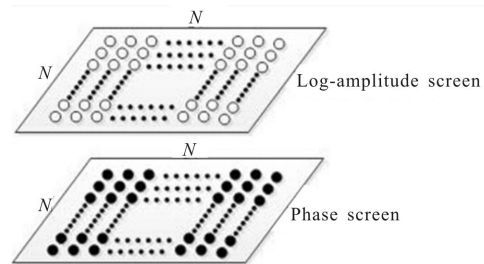


图 1 对数幅度屏与相位屏

Fig1 Log-amplitude screen and phase screen

然后,由幅度、相位的自相关函数与幅度-相位的互相关函数公式(10)~(12)可知,可以很容易计算出模拟幅度屏与相位屏中任意两点间的相关函数值,共有  $2N^2 \times 2N^2$  个相关函数值。由各点的相关函数值可以构造出一个  $2N^2 \times 2N^2$  的相关矩阵  $B$ ,其相关矩

阵  $B$  中包含 4 个子矩阵, 每个子矩阵中有  $N^2 \times N^2$  个点。每个子矩阵的分布如下: 矩阵  $B$  左上方子矩阵中的各点表示的是幅度屏中各点自相关函数值, 矩阵  $B$  右下方子矩阵中的各点表示的是相位屏中各点自相关函数值, 矩阵  $B$  右上方和左下方两个子矩阵中的各点表示的是幅度屏中各点与相位屏中各点间的互相关函数值, 如图 2 所示。

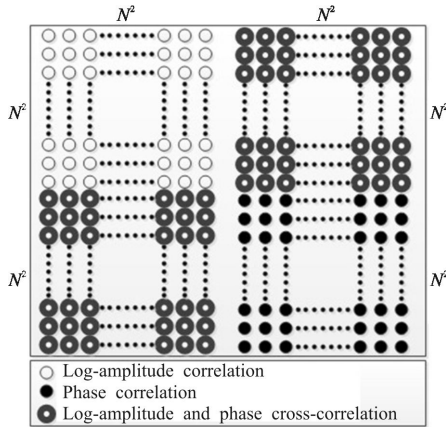


图 2 对数幅度与相位的相关矩阵  $B$   
Fig2 Correlation matrix  $B$  of log-amplitude and phase

相关矩阵  $B$  是由公式(10)~(12)采用数值积分的方法计算得出。虽然矩阵  $B$  中包含  $2N^2 \times 2N^2$  个值, 但是大部分值是相同的, 矩阵  $B$  中实际需要计算的相关值数目不超过  $3N(N+1)/2$ 。

最后, 相关矩阵  $B$  可由奇异值分解为矩阵  $U$  和  $\Lambda$ , 由矩阵  $U$  和  $\Lambda$ , 模拟一对相关的随机幅度屏与相位屏如下:

$$\Phi = U\sqrt{\Lambda}X \quad (13)$$

式中:  $U$  中的列向量代表矩阵  $B$  的特征矢量;  $\Lambda$  表示的是特征值为  $\lambda_i$  的对角矩阵。  $X$  代表长度为  $2N^2$ , 均值为 0, 方差为 1 的随机高斯列矢量。

由公式(13)获得一个长度为  $2N^2$  的列矢量, 其中列矢量的上半部分是模拟的随机幅度屏数据, 下半部分是模拟的随机相位屏数据。由这两部分数据得到一对  $N \times N$  个点的二维随机幅度屏与随机相位屏。

### 3 仿真结果

文中采用结构函数这一参数来评价模拟这一对相关的随机幅度屏与相位屏的正确性, 模拟随机幅度屏与相位屏的结构函数可以表示如下:

$$D_{sim,\chi}(r) = \langle [\Phi_\chi(R+r) - \Phi_\chi(R)]^2 \rangle$$

$$D_{sim,S}(r) = \langle [\Phi_S(R+r) - \Phi_S(R)]^2 \rangle$$

$$D_{sim,\chi S}(r) = \langle [\Phi_\chi(R+r) - \Phi_\chi(R)][\Phi_S(R+r) - \Phi_S(R)] \rangle \quad (14)$$

式中:  $r$  表示两点之间的距离;  $\langle \cdot \rangle$  表示所求的是统计平均值。

相应的理论结构函数可以由以下公式获得:

$$D_{theory,\chi}(r) = 2[B_\chi(0) - B_\chi(r)]$$

$$D_{theory,S}(r) = 2[B_S(0) - B_S(r)]$$

$$D_{theory,\chi S}(r) = 2[B_{\chi S}(0) - B_{\chi S}(r)] \quad (15)$$

式中:  $B_\chi$ ,  $B_S$  和  $B_{\chi S}$  分别表示幅度、相位自相关函数值及幅度-相位互相关函数值。

图 3 代表模拟的对数幅度结构函数、相位结构函数及对数幅度-相位结构函数与各自理论结构函数

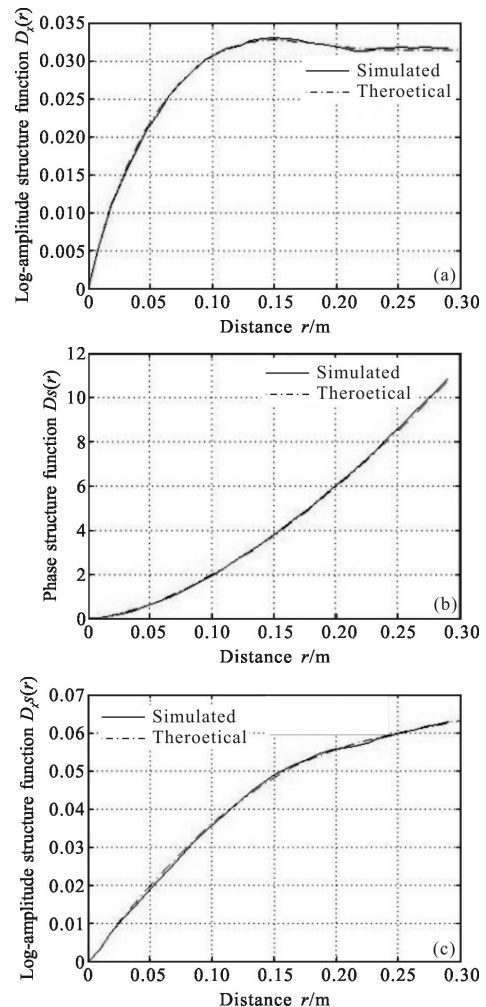


图 3 模拟的对数幅度结构函数(a), 相位结构函数(b), 对数幅度-相位结构函数(c)

Fig.3 Simulation log-amplitude structure function (a), phase structure function (b), log-amplitude-phase structure function (c)

数之间的差别。从图中可以看出在此情况下获得的模拟结构函数曲线与理论结构函数曲线是一致的,文中仿真中参数选择如下:仿真次数为50 000次,大气湍流外尺度 $L_0=100\text{ m}$ ,大气湍流内尺度 $l_0=0.001\text{ m}$ ,光波波长 $\lambda=1.55\ \mu\text{m}$ ,天顶角 $\varphi=0^\circ$ ,光学口径 $D=0.3\text{ m}$ ,采样数 $N=32$ 。

图4表示模拟一对相关的幅度屏与相位屏。

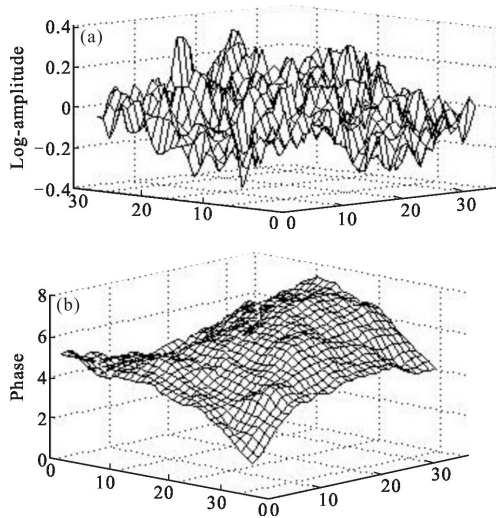


图4 模拟的对数幅度屏(a),相位屏(b)

Fig.4 Simulation log-amplitude screen (a), phase screen (b)

仿真环境:微机主频2.1-GHz,双核,2-GB内存,仿真平台Matlab R2010a。在此仿真环境下,计算相关矩阵 $B$ 所花费的时间大约31 s,对矩阵 $B$ 进行奇异值分解所花费的时间大约60 s,这些准备工作只需要进行一次。如果不考虑准备时间,模拟一对 $32\times 32$ 格点的相关的幅度屏与相位屏花费的时间约0.01 s,速度非常快。

## 4 结论

(1) 与多相位屏的模拟方法<sup>[5]</sup>相比,文中提出的在接收端模拟一对相关的随机幅度屏与相位屏的数值模拟方法模拟速度快;(2) 与基于功率谱模拟一对相关的幅度屏与相位屏的模拟方法<sup>[7-8]</sup>相比,文中提出的模拟方法可更准确地考虑湍流内、外尺度的影响,模拟更准确。

但是,文中所提出的方法也存在一些不足:(1) 此方法仅适用于弱湍流情况,只有在弱湍流情况下幅度、相位的自相关函数及幅度-相位的互相关函数的公式(1)~(3)才成立,这种不足在参考文献[7]中也

是存在的,若要模拟强湍流,则必须考虑其它的方法。针对空间激光通信系统,尤其是星地间激光通信,一般来说在天顶角不是太大的情况下是符合弱湍流条件的。(2) 模拟得到的一对相关幅度屏与相位屏尺寸很小,文中一个屏的点数只有 $32\times 32$ 个。这主要是由计算机内存大小限制的。若想要模拟一对尺寸更大的相关幅度屏与相位屏,需用预测插值算法对模拟得到的随机幅度屏与随机相位屏进行插值或扩展。

## 参考文献:

- [1] Xiang Jingsong. Fast and accurate simulation of the turbulent phase screen using fast Fourier transform [J]. *Optical Engineering*, 2014, 53(1): 016110-016110.
- [2] Wang Qitao, Tong Shoufeng, Xu Youhui. On simulation and verification of the atmospheric turbulent phase screen with Zernike polynomials [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(7): 1907-1911. (in Chinese)
- [3] Wu H L, Yan H X, Li X Y, et al. Statistical interpolation method of turbulent phase screen [J]. *Optics Express*, 2009, 17(17): 14649-14664.
- [4] Assémat F, Wilson R, Gendron E. Method for simulating infinitely long and non stationary phase screens with optimized memory storage [J]. *Optics Express*, 2006, 14(3): 988-999.
- [5] Knepp D L. Multiple Phase-screen calculation of the temporal behavior of stochastic waves [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1983, 71(6): 722-737.
- [6] Sedmak G. Implementation of fast-Fourier-transform-based simulations of extra-large atmospheric phase and scintillation screens [J]. *Applied Optics*, 2004, 43(23): 4527-4538.
- [7] Kouznetsov D, Voitsekhovich V V, Ortega-Martinez R. Simulations of turbulence-induced phase and log-amplitude distortions [J]. *Applied Optics*, 1997, 36(2): 464-469.
- [8] Safari M, Hranilovic S. Simulation of atmospheric turbulence for optical systems with extended sources [J]. *Applied Optics*, 2012, 51(31): 7509-7517.
- [9] Lawrence R S, Strohbehn J W. Strohbehn. A survey of clear-air propagation effects relevant to optical communication [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1970, 58(10): 1523-1545
- [10] Andrews L C, Phillips R L, Yu P T. Optical scintillations and fade statistics for a satellite-communication system [J]. *Applied Optics*, 1995, 34(33): 7742-7751.
- [11] Prudnikov A P, Brychkov Y A, Marichev O I. Integrals and Series [M]. New York: Gordon & Breach, 1988, 1: 446.