

## 新型混合柔性铰链柔度研究

倪迎雪<sup>1,2</sup>, 伞晓刚<sup>2</sup>, 高世杰<sup>2</sup>, 王晶<sup>2</sup>, 王涛<sup>1,2</sup>, 吴佳彬<sup>1,2</sup>, 桑志昕<sup>1,2</sup>, 张楠<sup>3</sup>

- (1. 中国科学院大学, 北京 100049;
2. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;
3. 中国科学院国家天文台长春人造卫星观测站, 吉林 长春 130117)

**摘要:** 提出了一种新型双曲线直圆混合柔性铰链。利用卡氏第二定理推导出双曲线直圆混合柔性铰链的柔度计算公式, 并根据所推导的公式, 分析了直圆半径、最小厚度和切割深度对其柔度的影响。同时采用实体单元建立双曲线直圆混合柔性铰链的有限元模型, 对不同几何参数的铰链进行仿真分析, 并对仿真解与解析解进行对比。结果表明: 仿真解与解析解的最大误差在 8% 以内, 证明了所推导公式的正确性; 与不同形状的柔性铰链对比得出, 双曲线直圆混合柔性铰链具有更好的转动能力和对载荷较高的敏感性。所设计的新双曲线直圆混合柔性铰链更适用于快速反射镜支撑结构中, 同时也为混合型柔性铰链的设计和 optimization 提供了理论依据。

**关键词:** 双曲线直圆混合柔性铰链; 柔度; 解析法; 有限元分析

**中图分类号:** TH122 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201645.1017001

## Research on flexibility of the novel hybrid flexure hinge

Ni Yingxue<sup>1,2</sup>, San Xiaogang<sup>2</sup>, Gao Shijie<sup>2</sup>, Wang Jing<sup>2</sup>, Wang Tao<sup>1,2</sup>, Wu Jiabin<sup>1,2</sup>,  
Sang Zhixin<sup>1,2</sup>, Zhang Nan<sup>3</sup>

- (1. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;
2. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;
3. Changchun Observatory, National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130117, China)

**Abstract:** A novel hyperbolic-circular flexure hinge was presented. According to the Castigliano's second theorem, the compliance calculations of the flexure hinge were derived. From the deduced equations, the effects of radius, minimum thickness and depth of cut on the hinge for flexibilities were deeply researched. Meanwhile, the finite element model of the flexible hinge was also built by adopting solid element, and then the simulations of different geometric parameters were obtained. Comparing simulations and analytical solutions explained that: the maximum error is below 8%, which verified the correctness of the equations. In addition, the comparisons on the flexibilities of flexure hinges with various shapes showed that: the hyperbolic-circular flexure hinge had better ability to rotate and higher sensitivity to load. Thus, the design of the new hyperbolic-circular flexure hinges in this paper is more suitable for

收稿日期: 2016-02-05; 修订日期: 2016-03-03

基金项目: 国家自然科学基金(11403064)

作者简介: 倪迎雪(1991-), 女, 博士生, 主要从事光机系统结构设计及快速反射镜系统方面的研究。Email: ccniyingxue@163.com

导师简介: 王晶(1966-), 女, 研究员, 博士生导师, 主要从事光电成像与测量技术方面的研究。Email: wangjing@ciomp.ac.cn

support structure of Fast Steering Mirror and provides a theoretical basis for design and optimization of hybrid flexure hinges.

**Key words:** hyperbolic-circular flexure hinges; flexibility; analytic method; finite element analysis

## 0 引言

柔性铰链是一种利用弹性材料的微小角变形和其自恢复特性产生位移的特殊运动副<sup>[1]</sup>。近年来,柔性铰链凭借零摩擦、无需润滑、运动平稳和结构紧凑等优点<sup>[2-4]</sup>被广泛应用于许多领域,如:快速反射镜支撑机构、微位移调整机构、压电陶瓷驱动器、导弹轨道控制装置和陀螺仪等领域<sup>[5-7]</sup>。随着快速反射镜系统对精度和转角范围要求越来越大,对柔性铰链的精度和转动范围的要求也越来越高。

针对不同的应用环境,国内外已有许多研究人员设计出多种截面形状的柔性铰链并进行了优化。1965年 Paros 和 Weisbord 推导出直圆型柔性铰链各柔度的近似解<sup>[8]</sup>;任宁等提出了双曲线直梁复合型柔性铰链,并分析了其转动能力和对载荷的敏感性,双曲线直梁复合型柔性铰链结合了双曲线型和直梁型柔性铰链的优点,提高了其综合的工作性能<sup>[9]</sup>。目前用于快速反射镜系统的铰链支撑结构主要有直梁型和直圆型柔性铰链,直圆型柔性铰链运动范围小,但精度较高;直梁型柔性铰链运动精度较差<sup>[8-11]</sup>。通过研究发现双曲线型柔性铰链对非工作方向的变形不敏感,具有较高的转动能力<sup>[11-13]</sup>。因此文中为了满足快速反射镜系统高精度和偏转范围大等要求,提出一种新型混合柔性铰链:双曲线直圆混合柔性铰链。

文中利用卡氏第二定理推导出该混合铰链的柔度计算公式,并采用实体单元对该柔性铰链的柔度进行有限元仿真分析,在一端固定、一端承受力矩和力的边界条件下,分析该柔性铰链的柔度。通过对两种方法所得结果的对比验证了柔度理论推导的正确性。同时,分析了直圆半径、最小厚度和切割深度对其柔度的影响,并通过与双曲线、直圆和双曲线直梁复合型柔性铰链的柔度进行对比,说明双曲线直圆混合柔性铰链具有更强的转动能力。

## 1 铰链柔度计算公式

双曲线直圆混合柔性铰链,由双曲线型和直圆

型柔性铰链混合而成,如图 1 所示。该铰链的结构参数分别是宽度  $b$ 、最小厚度  $t$ 、切割深度  $c$ 、混合曲线  $x$  方向投影长度  $L$  和直圆半径  $R$ 。

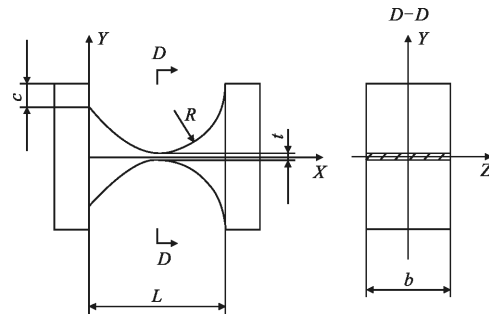


图 1 新型双曲线直圆混合型柔性铰链结构简图  
Fig.1 Sketch of the hyperbolic-circular flexure hinge

为了便于柔度计算公式的推导,作以下假设:  
(1) 铰链的变形集中在双曲线和直圆部分,忽略其他部分的变形。(2) 铰链的变形十分微小,各变形之间的干涉不予考虑。(3) 基于小变形悬臂梁假设<sup>[14-16]</sup>,铰链的弯曲变形由弯矩和力产生,考虑轴向载荷影响,忽略剪切和扭转的影响。

基于以上假设,设定该柔性铰链为一端固定,另一端承受弯矩和力,其受力分析如图 2 所示。

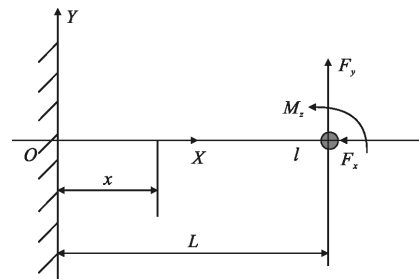


图 2 柔性铰链受力分析图  
Fig.2 Sketch of the load of the flexure hinge

在弯矩  $M_z$  和力  $F_y$  作用下柔性铰链发生  $\theta$  角度的微小角位移; $u_x$  为在力  $F_x$  作用下产生的沿  $x$  轴的微小线位移; $u_y$  为在力  $F_y$  和弯矩  $M_z$  作用下产生的沿  $y$  轴的微小线位移。根据卡氏第二定律,可以得到柔性铰链在 1 点处的变形量与所受载荷的关系式为:

$$\begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{x-F_x} & 0 & 0 \\ 0 & C_{y-F_y} & C_{y-M_z} \\ 0 & C_{\theta-F_y} & C_{\theta-M_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix} \quad (1)$$

由刚度互等定理,有  $C_{\theta-F_y}=C_{y-M_z}$ 。并且对位移矢量应用卡氏第二定理,有  $u_{1x}=\partial U/\partial F_{1x}$ 、 $u_{1y}=\partial U/\partial F_{1y}$  和  $\theta_{1z}=\partial U/\partial M_{1z}$ 。其中,  $U$  为柔性铰链的变形能,根据材料力学知识可知,变形能表达式为:

$$U = \frac{1}{2} \left( \int \frac{F_x^2}{EA(x)} dx + \int \frac{M_z^2}{EI_z(x)} dx \right) \quad (2)$$

式中:  $E$  为柔性铰链材料的弹性模量;  $F_x$  为  $X$  方向所

受的力,  $F_x=F_{1x}$ ;  $M_z$  为绕  $Z$  轴的力矩,  $M_z=M_{1z}+F_{1y}(L-x)$ ;  $I_z(x)$  为绕  $Z$  轴的转动惯量,  $I_z(x)=bh^3(x)/12$ ;  $A(x)$  为铰链的横截面积,  $A(x)=bh(x)$ ;  $h(x)$  为截面上任意一点的厚度。如图 2 所示坐标系,距离固定端为  $x$  的截面处,铰链厚度  $h(x)$  的表达式为:

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) = 2\sqrt{t^2 + 4c(c+t)\left(1 - 2\frac{x}{L}\right)^2}, & 0 < x < \frac{L}{2} \\ h_2(x) = 2\left(t + R - \sqrt{R^2 - \left(x - \frac{x}{L}\right)^2}\right), & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad (3)$$

结合公式(1)~(3),求得双曲线直圆混合柔性铰链的各个柔度分别为:

$$\begin{aligned} C_{x-F_x} &= \frac{L}{4Eb\sqrt{c(c+t)}} \ln\left(\frac{2c^2+2c+\sqrt{c(c+t)(2c+t)^2}}{\sqrt{ct^2(c+t)}}\right) + \frac{1}{Eb\sqrt{t(2R+t)}} \left[ (R+t) \left( \arctan \frac{L}{2\sqrt{t(2R+t)}} + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \sqrt{t(2R+t)} \right] \\ C_{y-M_z} &= \frac{3}{2Eb} \left[ \frac{L^2}{16ct(c+t)} + \frac{L^2(4c^2+4ct-t^2)}{16c^2(c+t)(t+2c)} + \frac{t^3-4R^3+3Rt^2}{2t^2(2R+t)^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{8t^{\frac{5}{2}}} \left[ \frac{32t\sqrt{t(2R+t)}(R+t)^3 - 12\sqrt{t(2R+t)}(4t^2(2R+t)^2) - L^2R^2}{(2R+t)^2(L^2+4t(2R+t))} + \frac{6LR^2(R+t)\tan^{-1}\frac{L}{2\sqrt{t(2R+t)}}}{(2R+t)^{\frac{5}{2}}} \right] \right] \\ C_{\theta-M_z} &= \frac{3}{2Eb} \left( \frac{L^2}{2t^2(2c+t)} + \frac{3R^2L(R+t)(8Rt+4t^2+L^2)+8Lt(2R+t)(R+t)^3}{t^2(2R+t)^2(8Rt+4t^2+L^2)^2} + \frac{3R^2(R+t)\left(\tan^{-1}\frac{L}{2\sqrt{t(2R+t)}} + \frac{\pi}{2}\right)}{2t^{\frac{5}{2}}(2R+t)^{\frac{5}{2}}} \right) \\ C_{y-F_y} &= C_{x-F_x} + C_{y-M_z} \\ C_{\theta-F_y} &= C_{y-M_z} \end{aligned} \quad (4)$$

## 2 铰链柔度的实例计算和有限元验证

### 2.1 实例计算

为验证文中所推导柔度计算公式的正确性,选取 10 组不同参数组成的双曲线直圆混合柔性铰链(见下文),材料选择铍青铜,弹性模量  $E=110$  GPa。利用上文推导的双曲线直圆混合柔性铰链的柔度计算公式(4)进行求解,会得到不同结构参数的铰链所对应的柔度大小。

### 2.2 有限元验证

根据表 1 中的结构参数,选用实体单元,建立双曲线直圆混合柔性铰链的有限元模型。其中,将柔性铰链的左端固定,右端施加弯矩  $M_z$ 、拉伸力  $F_x$  和  $F_y$ ,  $F_x=1$  N,  $F_y=1$  N,  $M_z=0.01$  N·m。对柔性铰链进行有限元分析,得到在该约束条件下 1 点的变形。图 3 为以第 1 组结构参数组成的双曲线直圆混合柔性铰链的有限元模型。

表 1 双曲线直圆混合型柔性铰链结构参数

Tab.1 Structure parameters of hyperbolic-circular flexure hinges

Number	$b/mm$	$t/mm$	$R/mm$	$L/mm$
1	5	0.2	4	8
2	5	0.2	8	16
3	5	0.3	8	16
4	5	0.4	4	8
5	6	0.2	6	12
6	6	0.2	8	16
7	6	0.3	6	12
8	8	0.2	6	12
9	8	0.4	6	12
10	8	0.4	8	16

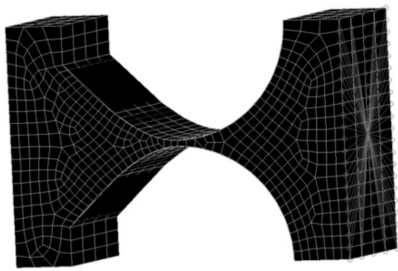


图 3 双曲线直圆混合柔性铰链的有限元模型

Fig.3 Finite element model of the hyperbolic-circular flexure hinges

根据表 1 结构参数建立数学模型和实体模型, 得到铰链各柔度解析解与有限元分析解的误差曲线如图 4 所示, 分析图 4 曲线可知: 利用文中推导的各

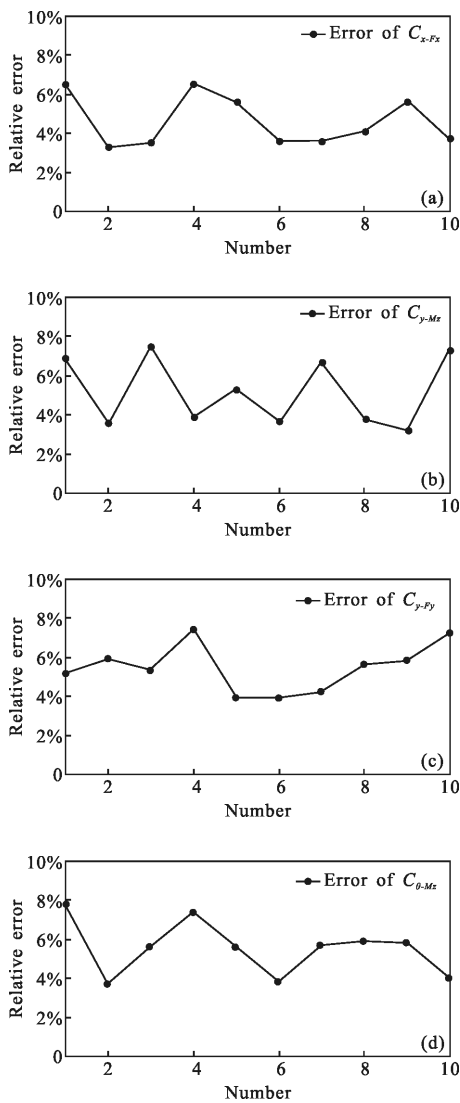


图 4 各柔度的解析解与有限元解误差曲线

Fig.4 Error curve of the analytical solution and the finite element solution of compliances

柔度计算公式(4)得到的解析结果与有限元分析结果之间的误差在 8%以内, 因此, 验证了所推导的各柔度计算公式的正确性。

### 3 铰链柔度性能分析

#### 3.1 关键结构参数对铰链柔度性能的影响

根据双曲线直圆混合柔性铰链的柔度计算公式可知, 铰链的材料及其结构参数对铰链的柔度都有一定的影响。其中, 很容易看出: 材料的弹性模量  $E$  和铰链的宽度  $b$  与各柔度均成反比。而切割深度  $c$ 、最小厚度  $t$ 、直圆半径  $R$  三个参数对柔度的影响较为复杂, 利用 MATLAB 进行数值仿真, 分析柔度  $C_{\theta-Mz}$  随参数  $(R, t)$ 、 $(R, c)$ 、 $(t, c)$  的变化关系如图 5~图 7 所示。从图 5~7 可看出: 柔度  $C_{\theta-Mz}$  随直圆半径  $R$  增大而增大, 随最小厚度  $t$  增大而减小, 随切割深度  $c$  增大而减小, 柔性铰链在直圆半径  $R$  为 8 mm, 最小厚度  $t$  为 0.2 mm,  $c$  为 1 mm 时柔度  $C_{\theta-Mz}$  最大。柔度  $C_{\theta-Mz}$  随最小厚度  $t$  的变化最快; 随直圆半径  $R$  的变化次

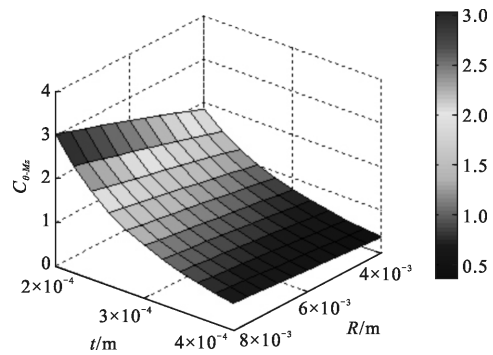


图 5 柔度  $C_{\theta-Mz}$  随参数  $R, t$  的变化关系

Fig.5 Relationship between the compliance  $C_{\theta-Mz}$  and  $R, t$

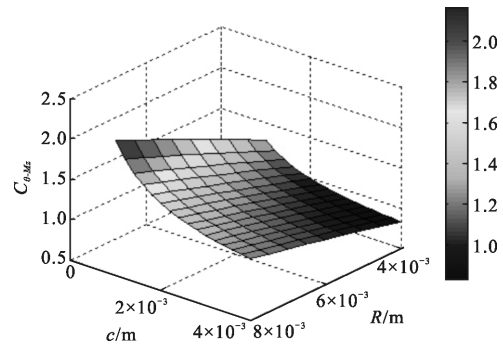


图 6 柔度  $C_{\theta-Mz}$  随参数  $R, c$  的变化关系

Fig.6 Relationship between the compliance  $C_{\theta-Mz}$  and  $R, c$

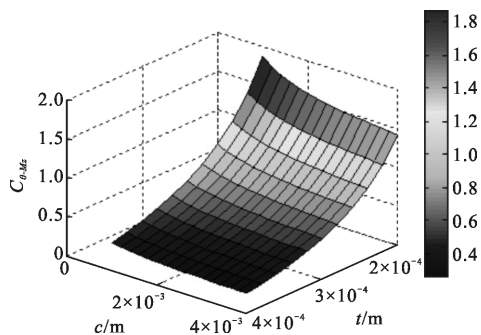


图 7 柔度  $C_{\theta-M_z}$  随参数  $t, c$  的变化关系

Fig.7 Relationship between the compliance  $C_{\theta-M_z}$  and  $t, c$

之;随切割深度  $c$  的变化最慢,即该双曲线直圆混合柔性铰链的最小厚度  $t$  对其柔度具有最显著的影响。结合各结构参数对柔度  $C_{\theta-M_z}$  的影响、应用场合

及加工条件的限制,为铰链的进一步优化设计提供了理论依据。

### 3.2 与不同形状柔性铰链的性能对比

为了进一步分析双曲线直圆混合柔性铰链的性能特点,将其与双曲线、直圆和双曲线直梁复合型柔性铰链分析结果进行对比。将不同形状铰链的结构参数设定与本文实例相同,计算得到的柔度解析解,任意取其中 4 组结果列于表 2~4。分析表 2~4 数据可以得出:双曲线直圆混合柔性铰链的弯曲柔度是双曲线柔性铰链的 2 倍以上,是直圆柔性铰链的 1.01 倍以上,是双曲线直梁复合型柔性铰链的弯曲柔度的 1.5 倍以上;双曲线直圆混合柔性铰链的拉伸柔度是双曲线柔性铰链的 1% 以内,直圆柔性铰链的 0.38% 以内,仅次于双曲线直梁复合型柔性铰链。

表 2 与双曲线型柔性铰链柔度对比

Tab.2 Comparison of compliance with hyperbolic flexure hinges

Number	Bending compliance $C_{\theta-M_z}/N^{-1}m^{-1}$			Stretching compliance $C_{x-F_x}/(\times 10^{-8} N^{-1}m)$		
	Hyperbolic flexure hinges	Hyperbolic-circular flexure hinge	Ratio	Hyperbolic flexure hinges	Hyperbolic-circular flexure hinge	Ratio
1	0.290 9	1.120 497 5	3.852	566.5	3.361 45	$5.933 7 \times 10^{-3}$
2	0.109 1	0.224 525	2.058	345.61	3.078 75	$8.908 2 \times 10^{-3}$
3	0.349 1	1.423 537 5	3.538 7	425.4	3.350 695	$7.876 6 \times 10^{-3}$
4	0.056 8	0.175 07	3.082 2	177.05	1.939 61	$1.095 5 \times 10^{-3}$

表 3 与直圆型柔性铰链柔度对比

Tab.3 Comparison of compliance with right circular flexure hinges

Number	Bending compliance $C_{\theta-M_z}/N^{-1}m^{-1}$			Stretching compliance $C_{x-F_x}/(\times 10^{-8} N^{-1}m)$		
	Right circular flexure hinge	Hyperbolic-circular flexure hinge	Ratio	Right circular flexure hinge	Hyperbolic-circular flexure hinge	Ratio
1	1.103 8	1.120 497 5	1.015	4 598.1	3.361 45	$7.310 5 \times 10^{-4}$
2	0.208	0.224 525	1.079 4	812.83	3.078 75	$3.787 7 \times 10^{-3}$
3	1.406 41	1.423 537 5	1.012 2	26 011	3.350 695	$1.288 2 \times 10^{-4}$
4	0.149 0	0.175 07	1.175	2 873.8	1.939 61	$6.749 3 \times 10^{-4}$

表 4 与双曲线直梁型柔性铰链柔度对比

Tab.4 Comparison of compliance with hyperbolic-rectangle flexure hinges

Number	Bending compliance $C_{\theta-M_z}/N^{-1}m^{-1}$			Stretching compliance $C_{x-F_x}/(\times 10^{-8} N^{-1}m)$		
	Hyperbolic-rectangle flexure hinge	Hyperbolic-circular flexure hinge	Ratio	Hyperbolic-rectangle flexure hinge	Hyperbolic-circular flexure hinge	Ratio
1	0.526 960 8	1.120 497 5	2.126 3	3.130 88	3.361 45	1.073 6
2	0.100 130	0.224 525	2.242 5	2.902 057	3.078 75	1.060 8
3	0.883 467	1.423 537 5	1.611 3	3.134 495	3.350 695	1.068 9
4	0.111 845 4	0.175 07	1.565 3	1.806 548	1.939 61	1.073 95

说明双曲线直圆混合柔性铰链的转动能力和对载荷的敏感性均优于双曲线和直圆柔性铰链；该型铰链的转动能力优于双曲线直梁复合型柔性铰链，而对载荷的敏感程度次于后者。所以双曲线直圆混合柔性铰链综合了两种铰链的优点。

#### 4 结 论

文中根据力学卡氏第二定律推导出双曲线直圆混合柔性铰链的柔度计算公式，并采用实体单元对该柔性铰链的柔度进行有限元仿真分析，理论解与有限元分析解之间的误差在 8% 以内，因此验证了所推导柔度计算公式的正确性。同时，结合所推导的柔度公式分析了铰链的关键结构参数对各柔度的影响关系，其中最小厚度  $t$  对各柔度的影响最为显著；并通过与双曲线型、直圆型和双曲线直梁复合型柔性铰链的柔度进行实例对比分析得出：双曲线直圆混合柔性铰链的弯曲柔度是双曲线柔性铰链的 2 倍以上，是直圆柔性铰链的 1.01 倍以上，是双曲线直梁复合型柔性铰链的弯曲柔度的 1.5 倍以上，说明双曲线直圆混合柔性铰链具有更强的转动能力。因此，文中设计的双曲线直圆混合柔性铰链更适用于高精度、大转角的快速反射镜系统支撑机构中，并且为混合型柔性铰链的进一步优化提供了很好的理论依据。

#### 参 考 文 献：

- [1] Nicolae Lobontiu, Jeffrey S N Paine, Edward O' Malley. Parabolic and hyperbolic flexure hinges: flexibility, motion precision and stress characterization based on compliance closed-form equations [J]. *Precision Engineering*, 2002, 26: 183-192.
- [2] Xu Hong, Guan Yingjun. Structural design of large aperture SiC mirror subassembly[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2014, 43(1): 83-88. (in Chinese)
- [3] Wang Rongqi, Zhou Xiaoqin, Zhu Zhiwei, et al. Development of a novel type of hybrid non-symmetric flexure hinges[J]. *Rev Sci Instrum*, 2015, 86(8): 289-298.
- [4] Liu Fuhe, Cheng Zhifeng. Design and analysis of supporting structure for rectangular mirror [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(5): 1512-1517. (in Chinese)
- [5] Shi R C, Dong W, Du Z J. Design methodology and performance analysis of application-oriented flexure hinges [J]. *Rev Sci Instrum*, 2013, 84: 1-4.
- [6] Yong Yuenkuan, Lu Tienfu, Handley D C. Review of circular flexure hinge design equations and derivation of empirical formulation [J]. *Precision Engineering*, 2008, 32 (2): 63-70.
- [7] Lu Yafei. Research on fast steering mirror system [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2009. (in Chinese)
- [8] Lu Qian, Huang Weiqing. Optimization design of deep-notch elliptical flexure hinges[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2015, 23(1): 207-214. (in Chinese)
- [9] Ren Ning, Wang Changlu, Ou Kailiang, et al. Research on rigidity of the novel hyperbolic-rectangle flexure hinges [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2012, 34(5): 781-785. (in Chinese)
- [10] Lin Rongzhou, Zhang Xianmin, Sergej Fatikow. Hybrid flexure hinges [J]. *Rev Sci Instrum*, 2013, 84(84): 085004.
- [11] Zhou Ziyun, Gao Yunguo, Shao Shuai, et al. Design of fast steering mirror using flexible hinge [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2014, 22(6): 1547-1554. (in Chinese)
- [12] Wu Yingfei, Zhou Zhaoying. Design of flexure hinge [J]. *Engineering Mechanics*, 2002, 19(6): 136-140. (in Chinese)
- [13] Stuart T Smith, Vivek G Badami, Jami S Dale. Elliptical flexure hinges[J]. *Rev Sci Instrum*, 1997, 68(3): 1474-1482.
- [14] Zhang Zhijie, Yuan Yibao. Research on half hyperbolic flexure hinge based on closed-form compliance equations [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2007, 28 (6): 1055-1059. (in Chinese)
- [15] Yang Chunhui. Analysis of the influence of straight beam flexible hinge structure parameter on the stiffness[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2010, 34(9): 17-19. (in Chinese)
- [16] Li Haixing, Ding Yalin. Mirror support structure with two mutually perpendicular single-axis circular flexure hinges[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(7): 1765-1769. (in Chinese)
- [17] Zhang Zhijie, Yuan Yibao. Compliances calculation and analysis of typical flexure hinge [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(4): 106-110. (in Chinese)