

## SVD-ACKF 算法在光电经纬仪实时定轨中的应用

李兆铭<sup>1</sup>, 杨文革<sup>2</sup>, 丁丹<sup>2</sup>, 王超<sup>3</sup>

(1. 装备学院 研究生院, 北京 101416; 2. 装备学院 光电装备系, 北京 101416;  
3. 西安卫星测控中心, 陕西 西安 710043)

**摘要:** 对光电经纬仪量测噪声统计特性未知或不精确导致实时定轨精度降低甚至发散的问题, 设计了基于奇异值分解的自适应容积卡尔曼滤波(SVD-ACKF)算法。首先, 利用 Sage-Husa 极大后验估计器及其改进形式对噪声统计特性进行在线估计, 使得 CKF 算法具有应对噪声变化的自适应能力, 并使用 SVD 代替传统 Cholesky 分解以提高数值计算的稳定性。然后, 阐述了实时定轨数学模型, 提出使用欧拉预测校正法对带  $J_2$  项摄动的轨道动力学方程进行离散。仿真实验表明: 欧拉预测校正法将轨道动力学方程的离散精度提高了 1 970.411 m。在量测噪声协方差矩阵取值恶劣时, SVD-ACKF 算法将实时定轨精度维持在 43 m 左右, 并且具有更好的数值稳定性。

**关键词:** 奇异值分解; 自适应容积卡尔曼滤波; 光电经纬仪; 欧拉预测校正法  
**中图分类号:** V249.3 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201746.0117005

## Application of SVD-ACKF algorithm for real-time orbit determination in optoelectronic theodolite

Li Zhaoming<sup>1</sup>, Yang Wenge<sup>2</sup>, Ding Dan<sup>2</sup>, Wang Chao<sup>3</sup>

(1. Company of Postgraduate Management, Academy of Equipment, Beijing 101416, China; 2. Department of Optical and Electrical Equipment, Academy of Equipment, Beijing 101416, China; 3. Xi'an Satellite Control Center, Xi'an 710043, China)

**Abstract:** An adaptive cubature Kalman filter algorithm based on singular value decomposition (SVD-ACKF) was proposed for orbit determination by optoelectronic theodolite when unknown or inaccurate noise statistics lead to low precision and divergence of filter. First, Sage-Husa maximum a posteriori and its improved form were used to estimate noise statistics online, and SVD instead of Cholesky decomposition in was used order to improve the stability of numerical calculation. Then, the mathematical model of orbit determination was expound, compared with the Euler method, improved Euler method was used to disperse the orbital dynamics equations with  $J_2$  perturbation. Finally, the simulation results show that improved Euler method can achieve a higher discrete precision, and SVD-ACKF algorithm can improve the accuracy and stability.

**Key words:** singular value decomposition; adaptive cubature Kalman filter; optoelectronic theodolite; improved Euler method

收稿日期: 2016-05-10; 修订日期: 2016-06-20

基金项目: 国家高技术研究发展计划(2015AA7026085)

作者简介: 李兆铭(1989-), 男, 博士生, 主要从事非线性滤波、航天测控方面的研究工作。Email: lizhaomingzbx@163.com

导师简介: 杨文革(1966-), 男, 教授, 博士生导师, 博士, 主要从事航天测控和现代数字信号处理方面的研究工作。

Email: wengyang.3@163.com

## 0 引言

为了提高空间资源的利用效率,需要对在轨航天器进行监视、编目及预报<sup>[1]</sup>。其中,空间目标监视要求实时确定被测航天器的轨道状态,而光电经纬仪作为靶场光电测量的重要设备,可以用于低轨卫星的量测任务,其测量元为斜距和角度<sup>[2-5]</sup>。结合卫星轨道动力学方程,利用上述测量值实时确定卫星轨道状态在本质上是一个非线性滤波问题。

解决非线性滤波问题常用的方法为扩展卡尔曼滤波<sup>[6]</sup>(Extended Kalman Filter, EKF)算法和无迹卡尔曼滤波<sup>[7]</sup>(Unscented Kalman Filter, UKF)算法。其中, EKF 对非线性函数的一阶泰勒展开降低了滤波估计的精度。UKF 采用 Sigma 点的分布近似表示非线性函数的分布,有效提高了非线性估计精度,但其参数的选取没有明确的理论依据,且当变量维数大于 3 时,权值存在负值,此时协方差矩阵可能不满足半正定条件,直接影响估计的稳定性。2009 年 Arasaratnam 等<sup>[8-9]</sup>采用一组等权值的容积点集来解决贝叶斯滤波积分问题,提出 CKF 算法,相比 UKF, CKF 具有严格的数学证明,且降低了计算量,在地基实时定轨中取得了一定应用。参考文献[10-11]分别采用 EKF 和 NPF-SRCKF 算法对地基实时滤波定轨进行了研究,但采用的算法均需已知噪声的精确统计特性。然而,随着使用环境的日益复杂化,光电经纬仪的量测噪声统计特性存在未知或不精确的问题。在处理未知噪声统计特性的方法中, Sage-Husa 次优无偏极大后验(MAP)估计器已得到广泛应用。参考文献[12-13]基于 Sage-Husa 算法在同一滤波框架下分别提出带噪声统计估计器的 UKF 和 CKF 算法,可以对未知噪声统计进行实时估计和修正,使得算法本身具有应对噪声变化的自适应能力,但没有考虑算法本身数值稳定性的问题。

针对光电经纬仪量测噪声统计特性未知或不精确导致实时定轨精度降低甚至发散的问题,文中设计了基于奇异值分解的自适应容积卡尔曼滤波 SVD-ACKF(adaptive cubature Kalman filter based on singular value decomposition)算法。将 Sage-Husa 算

法与 CKF 算法相结合,得到适用于非线性系统的自适应噪声统计估计器及其改进形式。使用 SVD 代替传统 Cholesky 分解以提高数值计算的稳定性。提出使用欧拉预测校正法对带  $J_2$  项摄动的轨道动力学方程进行离散。最后的仿真结果表明:该算法在无需量测噪声统计特性精确值时保证了实时定轨的精度和数值计算的稳定性,具有一定的工程应用价值。

## 1 基于 SVD 的 ACKF 算法

考虑具有加性噪声的离散非线性动态系统:

$$x_k=f(x_{k-1})+w_{k-1} \quad (1)$$

$$y_k=h(x_k)+v_k \quad (2)$$

$$w_{k-1} \sim (q_{k-1}, Q_{k-1}), v_k \sim (r_k, R_k) \quad (3)$$

式中:  $x_k \in R^{n_x}$  为状态向量;  $y_k \in R^{n_y}$  为量测向量,且噪声  $w_k, v_k$  相互独立。

### 1.1 噪声统计估计器

当公式(1)~(3)中的噪声统计特性为常值时,对于未知噪声,参考文献[12]给出了由 Sage-Husa 极大后验估计算法得到的常值噪声统计估计器。结合标准 CKF 算法,可以得到适用于非线性系统的次优无偏噪声统计估计器的递推形式为<sup>[13]</sup>:

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k} \left[ (k-1)\hat{q}_{k-1} + \hat{x}_k^+ - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f(x_{k-1}^{(i)}) \right] \quad (4)$$

$\hat{Q}_k =$

$$\frac{1}{k} \left[ (k-1)\hat{Q}_{k-1} + K_k \varepsilon_k \varepsilon_k^T K_k^T + P_k^+ - \left( \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{x}_k^{(i)} (\tilde{x}_k^{(i)})^T - \tilde{x}_k \tilde{x}_k^T \right) \right] \quad (5)$$

$$\hat{r}_k = \frac{1}{k} \left[ (k-1)\hat{r}_{k-1} + y_k - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} h(x_k^{(i)}) \right] \quad (6)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \left[ (k-1)\hat{R}_{k-1} + \varepsilon_k \varepsilon_k^T - \left( \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{y}_k^{(i)} (\tilde{y}_k^{(i)})^T - \tilde{y}_k \tilde{y}_k^T \right) \right] \quad (7)$$

当非线性系统阶数较高时,  $\hat{Q}_k$  和  $\hat{R}_k$  容易分别失去半正定性和正定性从而使得计算发散。为此,可以采用如下有偏噪声统计估计器以保证其在递推过程中始终保持半正定性和正定性。

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \left[ (k-1)\hat{Q}_{k-1} + K_k \varepsilon_k \varepsilon_k^T K_k^T \right] \quad (8)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \left[ (k-1)\hat{R}_{k-1} + \varepsilon_k \varepsilon_k^T \right] \quad (9)$$

### 1.2 基于SVD 的 ACKF 算法

CKF 算法采用 Spherical-Radial 原则,利用一组等权值的容积点集实现对贝叶斯滤波积分的非线性逼近。当采用三阶容积准则时,容积点总数是状态维数的 2 倍,容积点及其权值取为:

$$\xi^{(i)} = \sqrt{\frac{1}{m}} [1]_i, \omega_i = \frac{1}{m} \quad i=1,2,\dots,m=2n_x \quad (10)$$

式中:  $\xi^{(i)}$  为容积点;  $\omega_i$  为对应的权值;  $[1]_i$  表示如下构造矩阵中的第  $i$  列。

$$[1]_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (11)$$

计算舍入误差等原因可能导致协方差矩阵失去正定性,从而使得 Cholesky 分解无法正常进行。为提高数值计算的稳定性,可以考虑使用 SVD 代替 Cholesky 分解,SVD 过程如下:

$$P = U \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T \quad (12)$$

式中:  $S = \text{diag}(s_1, s_1, \dots, s_n)$  为由矩阵奇异值构成的对角阵,当  $P$  为对称矩阵时,  $U=V$ 。由于 SVD 具有较强的数值计算鲁棒性,因此使用 SVD 代替 Cholesky 分解可以解决协方差的病态条件问题。SVD-ACKF 算法步骤如下。

步骤 1: 滤波器初始化

滤波器初始化如下:

$$\hat{x}_0^+ = E(x_0), P_0^+ = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \quad (13)$$

循环  $k=1,2,\dots$ , 完成以下步骤。

步骤 2: 时间更新

$$P_{k-1}^+ = U_{k-1}^+ \begin{bmatrix} S_{k-1}^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (V_{k-1}^+)^T \quad (14)$$

$$x_{k-1}^{(i)} = \hat{x}_{k-1}^+ + U_{k-1}^+ \begin{bmatrix} \sqrt{S_{k-1}^+} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi^{(i)} \quad (15)$$

$$\hat{x}_k^{(i)} = f(x_{k-1}^{(i)}) + \hat{q}_{k-1} \quad (16)$$

$$\hat{x}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{x}_k^{(i)} \quad (17)$$

$$P_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{x}_k^{(i)} (\hat{x}_k^{(i)})^T - \hat{x}_k^- (\hat{x}_k^-)^T + \hat{Q}_{k-1} \quad (18)$$

步骤 3: 量测更新

$$P_k^- = U_k^- \begin{bmatrix} S_k^- & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (V_k^-)^T \quad (19)$$

$$x_k^{(i)} = \hat{x}_k^- + U_k^- \begin{bmatrix} \sqrt{S_k^-} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi^{(i)} \quad (20)$$

$$\tilde{y}_k^{(i)} = h(x_k^{(i)}) + \hat{r}_k \quad (21)$$

$$\hat{y}_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{y}_k^{(i)} \quad (22)$$

$$P_y = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{y}_k^{(i)} (\tilde{y}_k^{(i)})^T - \hat{y}_k (\hat{y}_k)^T + \hat{R}_k \quad (23)$$

$$P_{xy} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} x_k^{(i)} (\tilde{y}_k^{(i)})^T - \hat{x}_k^- (\hat{y}_k)^T \quad (24)$$

步骤 4: 状态更新

$$K_k = P_{xy} P_y^{-1} \quad (25)$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - \hat{y}_k) \quad (26)$$

$$P_k^+ = P_k^- - K_k P_y K_k^T \quad (27)$$

该方法可以对噪声统计特性进行在线估计,同时改善了数值计算的稳定性。

## 2 实时定轨数学模型

### 2.1 系统状态方程

在地球固连坐标系中描述卫星的运动,地球固连坐标系原点在地球质心,  $x$  轴指向格林尼治平均子午线,  $z$  轴指向地球自转轴,考虑  $J_2$  项引力摄动,卫星轨道动力学方程为<sup>[14]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(v_x) = v_x \\ \dot{y} = g(v_y) = v_y \\ \dot{z} = l(v_z) = v_z \\ \dot{v}_x = m(x, y, z, v_x) = \omega_e^2 x + 2\omega_e \cdot v_y + \frac{\mu x}{r^3} \left[ J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right) \left( 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 1.5 \right) - 1 \right] + a_x \\ \dot{v}_y = n(x, y, z, v_x) = \omega_e^2 y + 2\omega_e \cdot v_x + \frac{\mu y}{r^3} \left[ J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right) \left( 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 1.5 \right) - 1 \right] + a_y \\ \dot{v}_z = k(x, y, z) = + \frac{\mu z}{r^3} \left[ J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right) \left( 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 4.5 \right) - 1 \right] + a_z \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \quad (28)$$

式中:  $(x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z)^T$  为卫星在地固系中的位置和速度;  $J_2$  为带谐项系数;  $R_e$  为地球半径;  $\omega_e$  为地球角速度;  $(a_x \ a_y \ a_z)^T$  为其他摄动力之和,可以等效成零均值高斯白噪声。

用计算机进行滤波计算需要对状态方程进行离散化,以往研究中经常使用欧拉法<sup>[15]</sup>,该方法简单直观,几何意义明确,但只有一阶精度,随时间增长的离散误差会降低滤波估计精度。为此,文中提出使用欧拉预测校正对方程进行离散化,下面阐述两种方法的具体实现过程。

(1) 状态方程的欧拉法离散

欧拉法是一种显式单步方法,其用向前差商近似代替导数,得到递推格式如下:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (29)$$

式中:  $h$  为步长。按照公式(29)将公式(28)展开并整理成矩阵形式,得到离散化的轨道方程如下:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & h \cdot \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_k + \mathbf{Q}_k \quad (30)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} = h\omega_e^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} - \frac{1.5J_2 \mu h R_e}{r_k^4} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} + \\ \mu h \left( \frac{7.5J_2 R_e^2 z_k^2}{r_k^6} - \frac{1}{r_k^3} \right) \mathbf{I} \\ \mathbf{B} = \mathbf{I} + 2h\omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (31)$$

式中:  $\mathbf{X}_k = [x_k \ y_k \ z_k \ v_{xk} \ v_{yk} \ v_{zk}]^T$  为  $k$  时刻的轨道状态。

(2) 状态方程的欧拉预测校正法离散

欧拉预测校正法将欧拉公式与梯形格式结合使用,先用欧拉公式求出  $y_{k+1}$  的一个预测值  $\bar{y}_{k+1}$ ,然后用梯形格式校正求得近似值  $y_{k+1}$ ,具有二阶精度并且计算量适中,递推格式如下:

$$\begin{cases} \bar{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})] \end{cases} \quad (32)$$

按照上述格式结合公式(28)可以得到如下预测值和校正值。

预测值:

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = x_k + hv_{xk} \\ \bar{y}_{k+1} = y_k + hv_{yk} \\ \bar{z}_{k+1} = z_k + hv_{zk} \\ \bar{v}_{xk+1} = v_{xk} + hm(x_k, y_k, z_k, v_{yk}) \\ \bar{v}_{yk+1} = v_{yk} + hm(x_k, y_k, z_k, v_{xk}) \\ \bar{v}_{zk+1} = v_{zk} + hk(x_k, y_k, z_k) \end{cases} \quad (33)$$

校正值:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} (v_{xk} + \bar{v}_{xk+1}) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (v_{yk} + \bar{v}_{yk+1}) \\ z_{k+1} = z_k + \frac{h}{2} (v_{zk} + \bar{v}_{zk+1}) \\ v_{xk+1} = v_{xk} + \frac{h}{2} [m(x_k, y_k, z_k, v_{yk}) + m(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1}, \bar{z}_{k+1}, \bar{v}_{yk+1})] \\ v_{yk+1} = v_{yk} + \frac{h}{2} [n(x_k, y_k, z_k, v_{xk}) + n(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1}, \bar{z}_{k+1}, \bar{v}_{xk+1})] \\ v_{zk+1} = v_{zk} + \frac{h}{2} [k(x_k, y_k, z_k) + k(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1}, \bar{z}_{k+1})] \end{cases} \quad (34)$$

可以看到,欧拉预测校正法已经很难将方程化成工整的矩阵方程格式,但具有更高的精度。无论采用哪种离散方法,公式(28)均可以写成如下状态方程形式:

$$\mathbf{X}_k = f(\mathbf{X}_{k-1}) + w_{k-1} \quad (35)$$

式中:  $w_k$  为系统噪声。

2.2 量测方程

量测方程定义在测站地平坐标系中,原点位于光电经纬仪中心,  $xy$  平面为经过坐标原点与地球参考椭球面的切平面,  $x$  轴位于该切平面指向东,  $y$  轴指向北,  $z$  轴沿切平面法向指向上。地固系到地平坐标系的转换矩阵为:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix} \quad (36)$$

式中:  $\lambda$  为地心经度;  $\varphi$  为地心纬度。定义  $\boldsymbol{\rho} = [\rho_x \ \rho_y \ \rho_z]^T$  为地平坐标系中的轨道状态,于是得到:

$$\begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x - x_c \\ y - y_c \\ z - z_c \end{bmatrix} \quad (37)$$

式中:  $(x_c, y_c, z_c)$  为光电经纬仪地心坐标。将公式(37)展开得:

$$\begin{cases} \rho_x = -(x - x_c) \sin\lambda + (y - y_c) \cos\lambda \\ \rho_y = -(x - x_c) \sin\varphi \cos\lambda - (y - y_c) \sin\varphi \sin\lambda + (z - z_c) \cos\varphi \\ \rho_z = (x - x_c) \cos\varphi \cos\lambda + (y - y_c) \cos\varphi \sin\lambda + (z - z_c) \sin\varphi \end{cases} \quad (38)$$

由几何关系可得,在测站地平坐标系中,测元( $R, A, E$ )与轨道状态之间的关系为:

$$\begin{cases} R = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2} \\ A = \arctan(\rho_y / \rho_x) \\ E = \arctan(\rho_z / \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}) \end{cases} \quad (39)$$

### 3 仿真实验及分析

仿真场景为光电经纬仪对低轨太阳同步轨道卫星进行实时定轨,在地固系中描述卫星轨道,参考轨道数据由 STK(satellite tool kit)中 HPOP(high precision orbit propagation)算法产生,该算法考虑了大气阻力、太阳光压和三体引力等摄动影响。轨道历元为 1 Jul 2015 16:00:00(UTCG),半长轴 6 778.137 km,偏心率 0,轨道倾角 97.035°,升交点赤经 279.066°,近地点幅角 0°,真近点角 0°。光电经纬仪地理纬度为 28.478°,经度为 116.087°。由 STK 中 Access 模块可以生成光电经纬仪对卫星的可见时间窗口,为 1 Jul 2015 16:04:00(UTCG)到 1 Jul 2015 16:11:00(UTCG),持续 420 s,同时可以生成模拟测距和测角数据,假设测距精度为 100 m,测角精度为 0.015°。在 STK 中建立的仿真场景如图 1 所示。

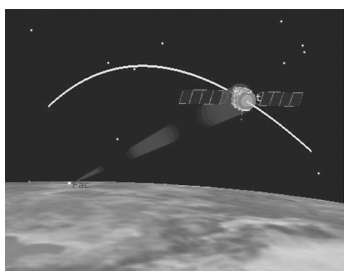


图 1 STK 仿真场景示意图  
Fig.1 STK simulation scenario

假设滤波初值与参考真实值有 2 km 的偏差,滤波初始值为:

$$\hat{x}_0^+ = [-2957347 \ 5828116 \ 1803686 \ 2222 \ -1147 \ 7328]$$

初始协方差矩阵为:

$$P_0^+ = \text{diag}[10^6 \ 10^6 \ 10^6 \ 10^4 \ 10^4 \ 10^4]$$

状态噪声方差矩阵为:

$$Q = \text{diag}[0.001^2 \ 0.001^2 \ 0.001^2 \ 0.001^2 \ 0.00001^2 \ 0.00001^2 \ 0.00001^2]$$

采用位置均方根误差(RMSE)和速度均方根误差来评价实时定轨结果, RMSE 定义如下:

$$E_{\text{position}}(k) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left( (r_x^n - \hat{r}_x^n)^2 + (r_y^n - \hat{r}_y^n)^2 + (r_z^n - \hat{r}_z^n)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

式中:  $N$  为蒙特卡罗仿真次数,速度均方根定义与公

式(40)类似。

轨道动力学方程的离散精度对滤波结果有较大影响。为此,将传统欧拉法与文中提出使用的欧拉预测校正法进行比较,仿真结果如图 2 所示。可以看出,相比欧拉法,欧拉预测校正法可以有效降低误差发散速度,提高离散精度。在 420 s 时欧拉法位置误差为 2 023.789 m,而欧拉预测校正法位置误差为 53.378 m。

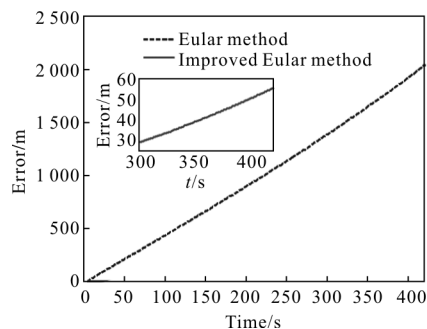


图 2 欧拉法与欧拉预测校正法离散精度比较

Fig.2 Comparison of Euler and improved Euler method

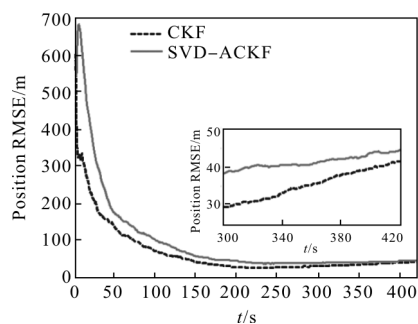
为了验证 SVD-ACKF 算法的性能,与标准 CKF 算法对量测噪声统计特性完全已知、量测噪声统计特性与真实值相差较大、量测噪声统计特性与真实值相差极大三种情况进行对比分析,如表 1 所示。取观测数据时间间隔  $T=1.0$  s,运行 200 次蒙特卡洛仿真。

表 1 三种仿真情况

Tab.1 Three conditions of simulation

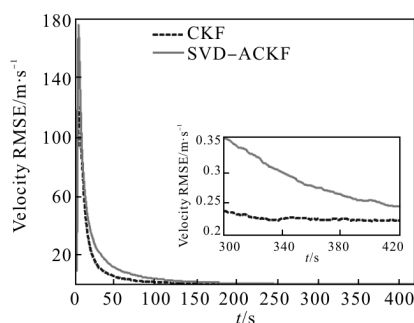
Three conditions	Measurement noise covariance matrix
Condition 1	$[10 \ 000 \ 6.85 \times 10^{-8} \ 6.85 \times 10^{-8}]$
Condition 2	$[20 \ 000 \ 3 \times 10^{-6} \ 3 \times 10^{-6}]$
Condition 3	$[50 \ 000 \ 3 \times 10^{-3} \ 3 \times 10^{-3}]$

三种情况的仿真结果如图 3~5 所示,为了表述的更加清晰,对 300~420 s 进行局部放大,并统计位置和速度的平均 RMSE 列于表 2。可以看出当量测噪声统计特性完全已知时,CKF 算法的定轨精度和收敛速度略高于 SVD-ACKF 算法,其中,定位精度高 5.951 m,定速精度高 0.062 m/s。当量测噪声统计特性与真实值相差较大时,SVD-ACKF 算法具有更高的定轨精度和更快的收敛速度,其中,定位精度高 32.750 m,定速精度高 0.208 m/s。当量测噪声统计特



(a) 位置 RMSE 比较

(a) Comparison of position RMSE

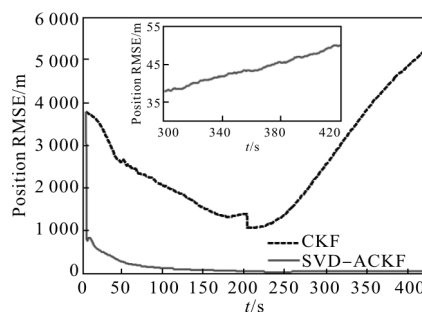


(b) 速度 RMSE 比较

(b) Comparison of velocity RMSE

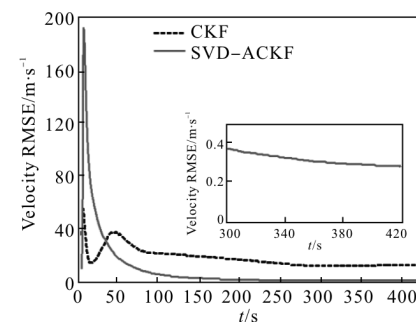
图 3 CKF 与 SVD-ACKF 算法对比(情况 1)

Fig.3 Comparison of CKF and SVD-ACKF (condition 1)



(a) 位置 RMSE 比较

(a) Comparison of position RMSE

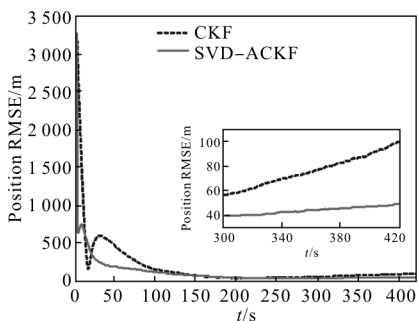


(b) 速度 RMSE 比较

(b) Comparison of velocity RMSE

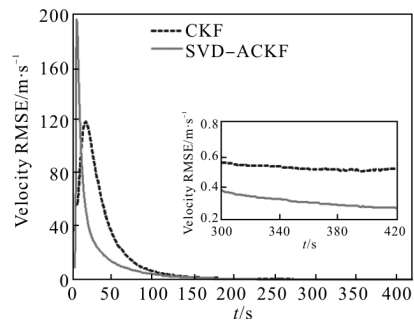
图 5 CKF 与 SVD-ACKF 算法对比(情况 3)

Fig.5 Comparison of CKF and SVD-ACKF (condition 3)



(a) 位置 RMSE 比较

(a) Comparison of position RMSE



(b) 速度 RMSE 比较

(b) Comparison of velocity RMSE

图 4 CKF 与 SVD-ACKF 算法对比(情况 2)

Fig.4 Comparison of CKF and SVD-ACKF (condition 2)

表 2 300~420 s 位置和速度 RMSE 平均值

Tab.2 Mean RMSE of position and velocity during 300-420 s

Condition	Algorithm	Position RMSE/m	Velocity RMSE/m·s <sup>-1</sup>
Condition 1	CKF	35.437 5	0.226 6
	SVD-ACKF	41.388 3	0.288 7
Condition 2	CKF	76.292 3	0.508 4
	SVD-ACKF	43.542 4	0.300 5
Condition 3	CKF	4 031.842 8	11.595 5
	SVD-ACKF	43.671 3	0.306 2

性与真实值相差极大时,此时 CKF 算法已经发散,而 SVD-ACKF 算法仍具有较高的定轨精度,其中,定位精度为 43.671 m,定速精度为 0.306 m/s。综上,在量测噪声协方差矩阵与真实值误差不断增大时,CKF 算法的定轨精度不断降低乃至发散,而 SVD-ACKF 算法的定轨精度维持在 43 m 左右,说明该算法无需噪声统计特性的精确值,具有抵抗噪声协方差矩阵恶劣取值的自适应能力。

上述三种情况中, SVD-ACKF 算法的  $\hat{R}_k$  的特征值如图 6 所示。可以看出, 三种不同情况下矩阵的特征值分别收敛于同一数值, 说明  $\hat{R}_k$  是趋于一致的, 进一步说明了文中算法的有效性。在仿真程序中, 如果将 SVD 替换成 Cholesky 分解, 则程序会因矩阵非正定报错而无法继续运行, 说明 SVD 具有更好的数值运算稳定性。

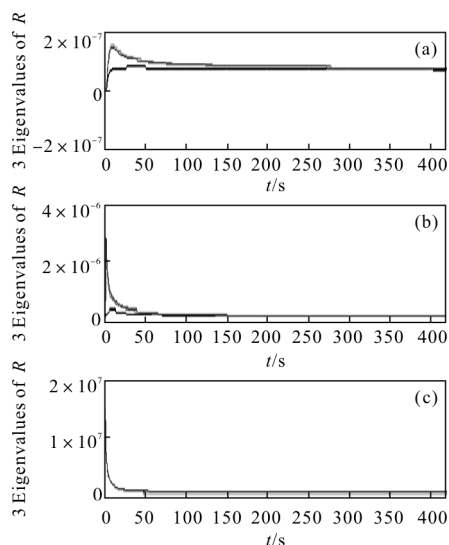


图 6 三种情况时量测噪声估计矩阵特征值

Fig.6 Eigenvalue of noise estimation matrix in three cases

## 4 结论

针对光电经纬仪量测噪声统计特性未知或不精确导致实时定轨精度降低甚至发散的问题, 文中设计了基于 SVD 的 ACKF 算法。提出使用欧拉预测校正法对带  $J_2$  项摄动的轨道动力学方程进行离散。利用 Sage-Husa 极大后验估计器及其改进形式对噪声统计特性进行在线估计, 并使用 SVD 代替传统 Cholesky 分解以提高数值计算的稳定性。通过对算法的理论阐述和仿真实验结果, 得到如下结论:

(1) 相比工程中经常使用的欧拉法, 欧拉预测校正法可以有效提高轨道动力学方程的离散精度。在文中算例 420 s 时欧拉法位置误差为 2 023.789 m, 而欧拉预测校正法位置误差仅为 53.378 m。

(2) 当量测噪声统计特性完全已知时, 标准 CKF 算法定轨精度略高于 SVD-ACKF 算法。当量测噪声统计特性与真实值相差逐渐变大时, 标准

CKF 算法定轨精度逐渐降低, 甚至滤波计算发散。而 SVD-ACKF 算法的定轨结果对量测噪声统计特性的取值不敏感, 定轨精度维持在 43 m 左右, 说明该算法具有抵抗量测噪声协方差矩阵恶劣取值的自适应能力。

(3) 使用 SVD 代替传统的 Cholesky 分解可以提高数值计算的稳定性。

## 参考文献:

- [1] Ning Xia, Ye Chunmao, Yang Jian, et al. Cubature Kalman filtering for orbit determination of space targets [J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2014, 29(1): 27-32. (in Chinese)  
宁夏, 叶春茂, 杨健, 等. 容积卡尔曼滤波在空间目标轨道确定中的应用[J]. 电波科学学报, 2014, 29(1): 27-32.
- [2] Liu Yanjun, Yan Haixia, Wang Donghe. Calibration for wide field of view infrared theodolite [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(3): 833-834. (in Chinese)  
刘岩俊, 闫海霞, 王东鹤. 大视场红外光电经纬仪精度标定[J]. 红外与激光工程, 2015, 44(3): 833-834.
- [3] Yan Haixia, Liu Yanjun, Wang Donghe. Correction method of dynamic error of optoelectronic theodolite [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2014, 43(9): 3031-3032. (in Chinese)  
闫海霞, 刘岩俊, 王东鹤. 光电经纬仪动态误差修正方法[J]. 红外与激光工程, 2014, 43(9): 3031-3032.
- [4] San Xiaogang, Sun Ning, Zhuo Renshan, et al. Design of supporting structure for primary mirror of large aperture theodolite [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2013, 21(12): 3112-3115. (in Chinese)  
伞晓刚, 孙宁, 卓仁善, 等. 大口径光电经纬仪主反射镜支撑结构设计[J]. 光学精密工程, 2013, 21(12): 3112-3115.
- [5] Li Manliang, Wu Qinzhang. CCD exposure center measuring system for photoelectric theodolite [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2013, 21(5): 1305-1310. (in Chinese)  
李满良, 吴钦章. 光电经纬仪 CCD 曝光中心测量系统的设计[J]. 光学精密工程, 2013, 21(5): 1305-1310.
- [6] Psiaki M L. Backward-smoothing extended Kalman filter[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2005, 28(5): 885-894.
- [7] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant H F. A new method for nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(3): 477-482.
- [8] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters [J]. *IEEE*

- Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1254–1269.
- [9] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman smoothers [J]. *Automatica*, 2010, 47(10): 2245–2250.
- [10] Dan Peng, Li Hengnian, Zhang Dingbo, et al. Real-time filtering orbit method based on multiple incomplete observation[J]. *Flight Dynamics*, 2014, 32(3): 286–288. (in Chinese)  
淡鹏, 李恒年, 张定波, 等. 基于多元不完备信息的实时滤波定轨方法[J]. *飞行力学*, 2014, 32(3): 286–288.
- [11] Li Zhijun, Hou Liqiang. An improved NPF-SRCKF based algorithm for spacecraft orbit determination [J]. *Journal of Astronautics*, 2014, 35(7): 812–816. (in Chinese)  
李志军, 侯黎强. 一种用于实时轨道确定的 NPF-SRCKF 滤波算法[J]. *宇航学报*, 2014, 35(7): 812–816.
- [12] Zhao Lin, Wang Xiaoxu, Xue Hongxiang, et al. Design of unscented Kalman filter with noise statistic estimator [J]. *Control and Decision*, 2009, 24(10): 1485–1486. (in Chinese)  
赵琳, 王小旭, 薛红香, 等. 带噪声统计估计器的 Unscented 卡尔曼滤波器设计[J]. *控制与决策*, 2009, 24(10): 1485–1486.
- [13] Ding Jialin, Xiao Jian. Design of adaptive cubature Kalman filter based on maximum a posteriori estimation [J]. *Control and Decision*, 2014, 29(2): 328–333. (in Chinese)  
丁家琳, 肖建. 基于极大后验估计的自适应容积卡尔曼滤波器[J]. *控制与决策*, 2014, 29(2): 328–333.
- [14] Zhao Minhua, Wu Bin, Shi Meng, et al. Satellite autonomous orbit determination using magnetometers and radar altimeter[J]. *Journal of Astronautics*, 2004, 25(4): 412–415. (in Chinese)  
赵敏华, 吴斌, 石萌, 等. 基于三轴磁强计与雷达高度计的融合导航算法[J]. *宇航学报*, 2004, 25(4): 412–415.
- [15] Zhang Chiping. *Computing Method* [M]. Beijing: China Science Publishing & Media Group Ltd, 2006. (in Chinese)  
张池平, *计算方法*[M]. 北京: 科学出版社, 2006.