

## 基于组合滤波的光纤陀螺惯导/星敏感器组合导航算法

李 斌, 蔡春龙, 孟祥涛

(北京航天时代光电科技有限公司, 北京 100094)

**摘 要:** 针对卡尔曼滤波在连续非线性的惯性组合导航系统中对模型误差估计不够准确的问题, 提出了利用可直接处理连续非线性系统的预测滤波为卡尔曼滤波提供一步预测的组合滤波算法, 弥补了两种滤波算法单独使用时的不足, 从而提高了导航系统精度。再利用光纤陀螺惯导实测数据与计算机生成的星敏感器数据对文中组合滤波算法进行了离线仿真, 证明了文中组合滤波算法的可行性、优越性。

**关键词:** 预测滤波; 卡尔曼滤波; 组合导航; 光纤陀螺

**中图分类号:** V241.5 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201847.1217005

## Algorithm based on combined filters for integrated navigation systems of FOG INS and star sensor

Li Bin, Cai Chunlong, Meng Xiangtao

(Beijing Aerospace Times Optical-electronic Technology CO., Ltd, Beijing 100094, China)

**Abstract:** In order to solve the problem that Kalman filter (KF) used in continuous, non-linear inertial navigation system (INS) suffered low accuracy in estimating model error, model predictive filter (MPF) directly processing continuous, non-linear system was adopted to provide one-step prediction for KF. Combining the advantages of the two filter algorithm, the accuracy of navigation could be further improved. Based on data tested by fiber-optic gyro (FOG) INS and star sensor (SS) data provided by computer, a simulation was executed for the presented combined filters, which proved the feasibility and superiority of the combined filtering algorithm in this paper.

**Key words:** model predictive filter; Kalman filter; integrated navigation; fiber-optic gyro

收稿日期: 2018-07-05; 修订日期: 2018-08-10

基金项目: 空军装备预先研究项目(103070401)

作者简介: 李斌(1986-), 男, 硕士生, 主要从事光纤陀螺捷联惯导技术方面的研究。Email: 709481981@qq.com

导师简介: 蔡春龙(1967-), 男, 研究员, 硕士生导师, 博士, 主要从事光纤陀螺捷联惯导系统技术方面的研究。

Email: cai\_chun\_long@163.com

## 0 引言

光纤陀螺惯导与星敏感器组合可优势互补,能实现更高精度的自主导航,目前常用卡尔曼滤波(Kalman Filter, KF)来实现两者数据的融合,但卡尔曼滤波一般适用于离散的线性系统,若要用于像惯导这类连续的非线性系统,就需对其进行离散化和线性化,这会影响算法的实时性以及对陀螺和加速度计误差估计的准确性,最终会影响导航精度。

预测滤波(Model Predictive Filter, MPF)是一种可直接处理连续非线性系统的滤波方法<sup>[1-4]</sup>,其原理是用滤波器的预测输出实时跟踪实际观测输出,从而估出系统的模型误差。预测滤波与卡尔曼滤波单独使用各有优缺点,由其原理可知,预测滤波能较准确地估计惯性组合导航系统中的三维陀螺误差,但无法估计三维加速度计误差<sup>[1]</sup>。因此,文中提出了将预测滤波与卡尔曼滤波相结合的组合滤波算法,以充分利用两种滤波的优点,更好地估出陀螺与加速度计误差,最终获得更高的导航精度。

## 1 预测滤波技术简介

设一个非线性系统的状态方程和量测方程为<sup>[5-7]</sup>:

$$\hat{x}(t)=f(x(t), t)+g(x(t), t)d(t) \quad (1a)$$

$$y(t)=h(x(t), t)+v(t) \quad (1b)$$

式中: $f$ 为连续可微的非线性函数; $x(t)$ 为状态量; $g$ 为模型误差扰动量; $d(t)$ 为模型误差量; $y(t)$ 为量测输出量; $h(t)$ 为量测驱动量; $v(t)$ 为量测噪声向量。

则量测估计得泰勒展开式为:

$$\hat{y}(t+\Delta t) \approx \hat{y}(t)+s(\hat{x}(t), \Delta t)+a(\Delta t)u(\hat{x}(t))d(t) \quad (2)$$

式中: $q$ 为向量。

$$s(\hat{x}(t), \Delta t)=\left[ \sum_{k=1}^{p_1} \frac{\Delta t^k}{k!} L_f^k(h_1) \cdots \sum_{k=1}^{p_m} \frac{\Delta t^k}{k!} L_f^k(h_m) \right]^T \quad (3)$$

对角矩阵为:

$$a(\Delta t)=\text{diag}\left( \frac{\Delta t^{p_1}}{p_1!} \cdots \frac{\Delta t^{p_m}}{p_m!} \right) \quad (4)$$

灵敏度矩阵为:

$$u(\hat{x}(t))=\begin{bmatrix} L_{g_1}[L_f^{p_1-1}(h_1)] & \cdots & L_{g_1}[L_f^{p_1-1}(h_1)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_m}[L_f^{p_m-1}(h_m)] & \cdots & L_{g_m}[L_f^{p_m-1}(h_m)] \end{bmatrix}=h(t) \cdot g(t) \quad (5)$$

式中: $p_i(i=1, \dots, m)$ 为 $d(t)$ 出现在 $h(t)$ 第 $i$ 个分量 $h_i(t)$ 微分中的最低阶数; $L_{g_j} L_f^k(h_j)$ 为标量函数 $L_f^k(h_j)$ 关于向量场 $g_j(\hat{x}(t), t)$ 的 $k$ 阶李导数; $g_j(j=1, \dots, q)$ 为 $g(t)$ 的第 $j$ 列。

定义预测滤波的性能指标函数如下:

$$J(d(t))=\frac{1}{2} [y(t+\Delta t)-\hat{y}(t+\Delta t)]^T R^{-1} \cdot [y(t+\Delta t)-\hat{y}(t+\Delta t)] + \frac{1}{2} d^T(t) w d(t) \rightarrow \min \quad (6)$$

式中: $w$ 为模型误差加权矩阵。则在 $[t_k, t_{k+1}]$ 时间内满足性能指标的估计 $\hat{d}_k$ 为:

$$\hat{d}_k=\{[a(\Delta t)u(\hat{x}(t))]^T R^{-1}[a(\Delta t)u(\hat{x}(t))] + w\}^{-1} \cdot [a(\Delta t)u(\hat{x}(t))]^T R^{-1}[y_{k+1}-\hat{y}_k-s(\hat{x}(t), \Delta t)] \quad (7)$$

## 2 组合导航系统模型建立

### 2.1 组合导航系统的状态方程

#### 2.1.1 卡尔曼滤波状态方程

选择东北天地理坐标系( $E, N, U$ )为导航坐标系,建立卡尔曼滤波的状态方程为:

$$\hat{x}_k(t)=F_k(t)X_k(t)+G_k(t)W_k(t) \quad (8)$$

式中: $G_k(t)$ 为系统的噪声转移矩阵; $W_k(t)$ 为系统噪声矢量阵。

其中

$$X_k(t)=[\phi_E \ \phi_N \ \phi_U, \ \delta V_E \ \delta V_N \ \delta V_U, \ \delta L \ \delta \lambda \ \delta h, \ \varepsilon_E \ \varepsilon_N \ \varepsilon_U, \ \nabla_E \ \nabla_N \ \nabla_U]^T \quad (9)$$

式中: $\phi_E \ \phi_N \ \phi_U$ 为姿态误差角; $\delta V_E \ \delta V_N \ \delta V_U$ 为速度误差方程; $\delta L \ \delta \lambda \ \delta h$ 为位置误差; $\varepsilon_E \ \varepsilon_N \ \varepsilon_U$ 为陀螺常值漂移; $\nabla_E \ \nabla_N \ \nabla_U$ 为加速度计零偏。

$$F_k(t)=\begin{bmatrix} F_{N9 \times 9} & F_{S9 \times 9} \\ 0_{6 \times 9} & 0_{6 \times 6} \end{bmatrix}_{15 \times 15} \quad (10)$$

式中: $F_N$ 和 $F_S$ 中的元素与惯导系统的误差方程相对应。

$$G_k(t)=\begin{bmatrix} C_b^n & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & C_b^n \\ 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} \end{bmatrix}_{15 \times 6} \quad (11)$$

式中: $C_b^n$ 为捷联姿态矩阵。

#### 2.1.2 预测滤波状态方程

预测滤波的状态量需要把模型误差从卡尔曼滤波的状态量公式(10)中分离出来,因此建立的预测滤波的状态方程为<sup>[1-21]</sup>:

$$\hat{x}_p(t) = F_p(t)X_p(t) + G_{p1}(t)D_p(t) + G_{p2}(t)W_p(t) \quad (12)$$

式中:  $F_p(t) = F_{N9 \times 9}$ ,  $G_{p1}(t) = F_{S9 \times 6}$ ,  $G_{p2}(t) = \begin{bmatrix} C_b^n & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & C_b^n \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{9 \times 6}$ 。

状态量和模型误差量为:

$$X_p(t) = [\phi_E \ \phi_N \ \phi_U, \delta V_E \ \delta V_N \ \delta V_U, \delta L \ \delta \lambda \ \delta h]^T \quad (13)$$

$$D_p(t) = [\varepsilon_E \ \varepsilon_N \ \varepsilon_U, \nabla_E \ \nabla_N \ \nabla_U]^T \quad (14)$$

因此,卡尔曼滤波的状态量就是预测滤波状态量  $X_p(t)$  和模型误差量  $D_p(t)$  的组合。即:

$$X_k(t) = [X_p(t), D_p(t)]^T \quad (15)$$

### 2.2 组合导航系统的量测模型

卡尔曼滤波与预测滤波的量测模型基本一致,只是量测矩阵与状态量存在差异。建立的量测方程为<sup>[1-2]</sup>:

$$Y(t) = H(t)X(t) + v(t) \quad (16)$$

式中:  $Y(t) = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ , 式中模型用于卡尔曼滤波时的量测矩阵为  $H(t) = H_k(t) = [I_{3 \times 3} \ 0_{3 \times 12}]$ , 用于预测滤波时的量测矩阵为  $H(t) = H_p(t) = [I_{3 \times 3} \ 0_{3 \times 6}]$ ; 状态量  $X(t)$  的选取与状态方程中的状态量保持一致;  $v(t)$  为量测噪声矩阵。

### 3 MPF 与 KF 组合滤波算法及其实现

卡尔曼滤波的各参数矩阵设置相对较成熟,所以文中只列出了预测滤波的参数矩阵设置。根据工

程经验,文中选取  $p_i=1, m=3, q=6$ ; 根据预测滤波的原理可知,模型误差  $\hat{d}_k$  估计中的一些参数矩阵为<sup>[5]</sup>:

公式(4)的  $q$  维向量  $s(\hat{x}, \Delta t) = F_{\delta 3 \times 9} \cdot X^T \cdot \Delta t$ , 公式(5)的

对角矩阵  $a(\Delta t) = \begin{bmatrix} \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ , 公式(6)的灵敏度矩

阵  $u(\hat{x}) = H_p * G_{p1} = [C_b^n \ 0_{3 \times 3}]_{3 \times 6}$ , 其中  $F_{\delta 3 \times 9}$  是  $F_{N9 \times 9}$  的前三行所有列,  $\Delta t$  为采样时间。由预测滤波的原理可知,灵敏度矩阵  $u(\hat{x})$  中存在全零列,将无法估计模型误差  $\hat{d}_k$  中的加速度计误差<sup>[2]</sup>。

参数设置好后,就可以对两种滤波算法进行组合滤波。组合滤波的基本思路是用预测滤波的估计量作为卡尔曼滤波的一步预测量  $X_{k/k+1}$ , 组合滤波的核心是状态量的拆分与组合,组合滤波的过程为:首先,给定初始的预测滤波状态量  $X_0$ , 进行预测滤波得到模型误差  $D_p$ , 再把模型误差  $D_p$  与预测滤波得到的状态量  $X_p$  组合到一起,合并得到卡尔曼滤波的一步预测状态量  $X_{k/k+1}$ , 接着进行卡尔曼滤波估计状态量  $X_{k+1}$ , 待一次卡尔曼滤波结束后如果还需进行,就把卡尔曼滤波的状态量  $X_{k+1}$  进行拆分,得到预测滤波的状态量  $X_{p+1}$ , 这样就可以正常的循环。

最后,为了更好地说明 MPF 与 KF 相结合的过程,给出了 MPF 与 KF 组合导航算法流程图(如图 1 所示)。

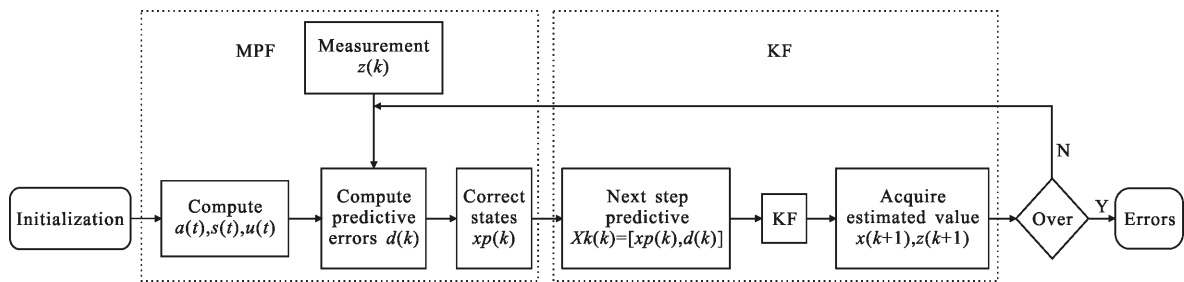


图 1 MPF 与 KF 组合导航算法流程

Fig.1 Flow diagram of MPF and KF integrated navigation

### 4 仿真试验验证

试验选用了某型光纤陀螺捷联惯导产品, 光纤陀螺零偏稳定性为  $0.05(^{\circ})/h[1\sigma]$ , 加速度计零偏为  $5 \times 10^{-5} g[1\sigma]$ , 惯导置于带有北向基准的测试平台上, 采集惯导系统三向陀螺和三向加速度计的 800 s 静

态输出原始数据; 星敏感器的量测精度设为  $3''$ , 数据更新频率 10 Hz, 计算机仿真生成导航坐标系下 800 s 静态的三向姿态数据, 用作星敏感器的静态导航输出数据。

图 2 是 MPF、KF 和 MPF+KF 三种滤波估计的部分陀螺和加速度计输出误差曲线。可以看出, 与

MPF、KF 滤波算法相比,MPF+KF 滤波算法可很好地估计陀螺和加速度计的输出误差。

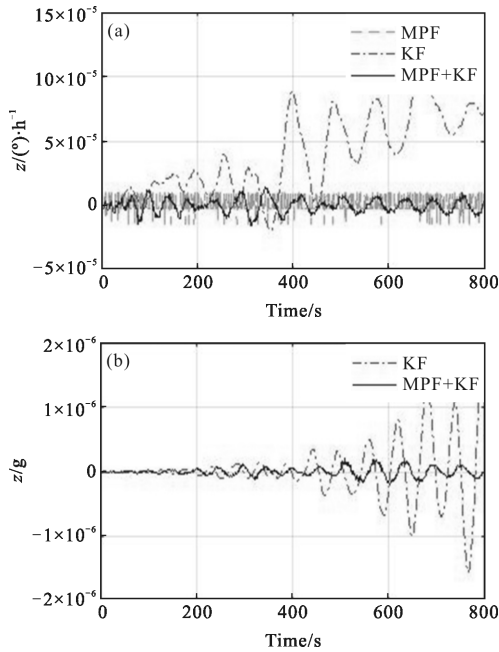


图 2 MPF+KF、MPF 和 KF 算法对 z 向陀螺和加速度计误差的估计曲线

Fig.2 Estimated chart for gyro and accelerometer errors of z axis based on MPF, MKF+KF and KF

图 3 是 MPF、KF 和 MPF+KF 三种滤波算法解算

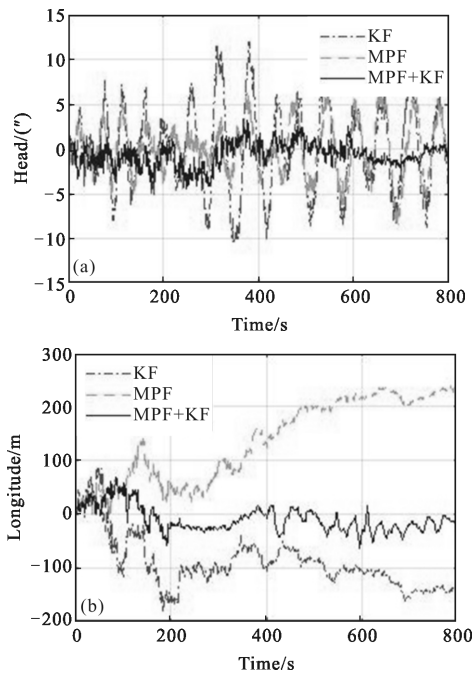


图 3 MPF+KF、MPF 和 KF 算法解算的航向角和经度误差对比

Fig.3 Contrast chart of path angle and longitude errors calculated by the algorithm of MPF, MKF+KF and KF

的部分导航参数对比图。可以看出,MPF+KF 算法的航向角和经度解算误差最小,其次是 MPF 算法的, KF 算法的最大。

由于上述三种算法的组合导航误差曲线都比较平滑,可以用最大误差值来评价这三种算法的精度水平,表 1 列出了这三种算法的最大误差统计结果。

表 1 组合导航系统最大误差统计

Tab.1 Statistics of errors maximum value of integrated navigation systems

Navigation information		MPF+KF	MPF	KF
Attitude errors / (°)	Head	4.87	5.61	11.99
	Pitch	3.03	3.85	6.18
	Roll	6.91	8.57	12.33
Velocity errors/m·s <sup>-1</sup>	East	0.62	2.17	1.48
	North	0.66	2.06	1.29
	Up	5.32	14.11	9.07
Position errors/m	Longitude	69.45	239.40	183.01
	Latitude	62.38	215.56	186.35
	Altitude	103.41	325.68	283.46

由上面仿真结果可见,在相同的 800 s 导航时间内,与 MPF 和 KF 算法解算导航参数的相比,MPF+KF 组合滤波算法解算的三向姿态最大误差约是 KF 算法的 50%,约是 MPF 算法的 80%;三向速度最大误差约是 KF 的 50%,约是 MPF 算法的 30%;三向位置最大误差约是 KF 算法的 35%,约是 MPF 算法的 30%。由此可知,与 MPF 和 KF 算法相比,MPF+KF 算法解算的组合导航参数精度最高。

## 5 结论

仿真试验结果表明,在光纤陀螺捷联惯导与星敏感器组合导航应用中,文中提出的将非线性预测滤波与卡尔曼滤波相结合的组合滤波算法,可很好解决卡尔曼滤波对陀螺和加速度计误差估计不够准确的问题,而且可弥补预测滤波无法估计加速度计误差的缺陷,最终可显著提高组合导航精度,证明了该“MPF+KF”组合滤波算法的可行性、优越性,可为其今后的进一步实际应用提供理论参考。

## 参考文献:

- [1] Yang Jing, Zhang Hongyue, Li Ji. INS nonlinear alignment with large azimuth misalignment angle using predictive filter [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2003, 11 (6): 44–52. (in Chinese)
- [2] Yang Yi, Gao Shesheng, Wu Jiapeng, et al. Feed-forward neural network algorithm based on model predictive filtering and its application in integrated navigation [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2014, 22 (2): 221–226. (in Chinese)
- [3] Crassidis J L, Markley F L. Predictive filtering for nonlinear systems [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1997, 20(3): 566–572.
- [4] Li J, Zhang H Y. Stochastic stability analysis of predictive filters [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2006, 29(3): 738–741.
- [5] Gao Wei, Lin Xingchen, Wang Qiuying, et al. FOG on-line calibration assisted by CCD sta sensor [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, 34(8): 1680–1684. (in Chinese)
- [6] Gao Shesheng, Song Feibiao, Jiang Weiwei. Robust adaptive model predictive filtering algorithm and application to integrated navigation [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2011, 19(6): 701–705. (in Chinese)
- [7] Xin Li, Pourya Shamsi. Model predictive current control of switched reluctance motore with inductance auto-calibration [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63 (6): 3934–3941.