

粗调平状态数字天顶仪定位方法研究

杨 上,周召发,刘先一,张 辉

(火箭军工程大学 兵器发射理论与技术国家重点学科实验室,陕西 西安 710025)

摘 要: 针对传统数字天顶仪定位方法中存在仪器需精确调平,数据拟合模型参数求解不准确和定位迭代过程复杂的问题,提出一种粗调平状态数字天顶仪定位方法。严格推导了水平状态下 CCD 图像坐标的计算式,利用倾角仪输出值与粗调平状态下 CCD 图像坐标计算得到水平状态 CCD 图像坐标;对粗调平状态下恒星切平面坐标进行分析,分析结果表明粗调平状态下对应的切平面与水平状态下对应的切平面基本平行,粗调平状态下的切平面坐标可直接用于数据拟合模型的建立;通过抗差 M 估计计算数据拟合模型的参数,抑制了粗大误差对参数解影响,提高了数据拟合模型的准确性;最后,通过联立数据拟合模型方程组解算旋转轴的 CCD 图像坐标、剔除迭代过程中的数据拟合模型反变换以及取切平面坐标平均值的方式优化定位迭代过程,提高定位解算效率的同时保证了数字天顶仪的定位精度。实验结果表明:粗调平状态定位方法的定位精度与精调平状态的定位精度基本相同,其中粗调平定位方法的定位经度精度为 $0.306''$,纬度精度为 $0.292''$,满足数字天顶仪定位精度的要求。

关键词: 数字天顶仪; 数据拟合模型; 倾斜修正; 定位方法

中图分类号: P222 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201847.0817007

Research on positioning method of digital zenith camera under rough leveling state

Yang Shang, Zhou Zhaofa, Liu Xianyi, Zhang Hui

(State Key Discipline Laboratory of Armament Launch Theory and Technology, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

Abstract: A positioning method of digital zenith camera was proposed to solve the problem that the traditional positioning method required precise leveling of the instrument, the data fitting model parameter was inaccurate and the positioning iterative process was complicated. The calculation formula of CCD image coordinates in the horizontal state was derived. CCD image coordinates of the horizontal state were obtained by using the CCD image coordinates under rough leveling and the output value of the inclinometer, and the star tangent plane coordinates under rough leveling were analyzed, the analysis results showed that the star tangent plane coordinates which needn't be correct could be used to establish data fitting model. The parameters of the data fitting model were calculated by the robust estimation, which restrained the influence of rough error on the parameters and improved the accuracy of the data fitting model. In the end, positioning iterative process was optimized by solving the simultaneous equations of data

收稿日期:2018-03-05; 修订日期:2018-04-03

基金项目:国家自然科学基金(41174162)

作者简介:杨上(1993-),男,硕士生,主要从事天文定位定向方面的研究。Email:1306676498@qq.com

导师简介:周召发(1971-),男,教授,博士生导师,博士,主要从事定位定向与基准传递技术方面的研究。Email:18592057570@139.com

fitting model to gain the CCD image coordinates of rotating axis, eliminating the inverse transformation of data fitting model and taking the average of the plane coordinates, which improved the efficiency and ensured the positioning accuracy. The experimental results showed that the positioning precision of positioning method under rough leveling is basically the same as the positioning method under fine leveling state. The accuracy of the positioning longitude under rough leveling is $0.306''$, the accuracy of the latitude is $0.292''$. Positioning accuracy satisfies the positioning requirement of digital zenith camera.

Key words: digital zenith camera; data fitting model; tilt correction; positioning method

0 引言

数字天顶仪通过拍摄天顶附近的恒星来确定目标点的天文经纬度, 依靠天体位置信息进行定位使得数字天顶仪具有抗干扰能力强、定位精度高等优点^[1-3]。CCD 传感器在数字天顶仪上的运用, 使得数字天顶仪采集的数据可在电脑上自动完成星图识别与定位解算, 由此让数字天顶仪又具有自动化程度高、定位效率高等优点^[4]。然而传统数字天顶仪定位是需要将仪器进行精确调平, 让倾角仪的两个敏感轴的输出值在 $\pm 10''$ 以内。调节数字天顶仪的 3 个脚螺旋达到精调平状态需耗费较多时间, 降低了数字天顶仪定位的效率^[5-6]。并且在精调平状态下, 数字天顶仪的定位精度易受到干扰。当前国内使用的数字天顶仪进行定位大部分都是在精调平状态下, 对于粗调平状态下的定位方法研究较少。因此研究数字天顶仪在粗调平状态下的定位方法具有重要意义。

精调平状态下, CCD 图像坐标系与天球切平面坐标系平行, CCD 图像坐标与恒星的天球切平面坐标之间建立的对应关系为仿射变换模型^[7]。而在粗调平状态下, CCD 平面与天球切平面之间存在较大的倾角, 无法建立数据拟合模型, 对此文中提出了一种粗调平状态数字天顶仪定位方法, 该方法主要思想是将粗调平状态下 CCD 图像坐标与切平面坐标转化到相互平行的坐标系中。首先利用倾角仪的输出值构造四元数坐标变换矩阵修正 CCD 图像坐标, 由粗调平状态下的 CCD 图像坐标计算得到水平状态下的 CCD 图像坐标; 由于粗调平状态下恒星切平面坐标系的坐标原点与精调平状态下相比存在偏移, 故对粗调平状态下的切平面坐标进行分析; 在修正后, CCD 图像坐标系与切平面坐标系相互平行, 在此基础上最后对传统的数字天顶仪定位方法进行

了优化, 从而实现无需精密调平的数字天顶仪定位方法。

1 数据拟合模型分析

建立 CCD 图像坐标与恒星天球切平面坐标的数据拟合模型是数字天顶仪定位解算的关键环节之一, 关系着数字天顶仪旋转轴天文经纬度的解算精度^[5,7]。恒星成像在 CCD 传感器平面上, 建立 CCD 图像坐标系 $o-xy$, 以 CCD 传感器中点为坐标原点, x 轴和 y 轴分别与 CCD 传感器的两边平行, 像点坐标 (x, y) 用 CCD 传感器上像素的位置表示。切平面坐标系 $o-uv$ 是将恒星的球面坐标转化为平面坐标的坐标系, 由数字天顶仪旋转轴与天球的交点为原点的, 子午圈切线方向为 v 轴, 指向北为正向, 卯酉圈切线方向为 u 轴, 指向东为正向。精调平状态下 CCD 平面与天球切平面可认为是相互平行的。数字天顶仪实际运用中, CCD 传感器由于外界因素影响使得 x 轴与 y 轴不完全垂直, 两坐标轴的尺度比例系数不同^[7], 假设 x 轴与 u 轴之间的夹角为 α ; y 轴与 v 轴之间的夹角为 β ; m, n 分别为 CCD 图像坐标系坐标轴的尺度比例系数, 如图 1 所示。

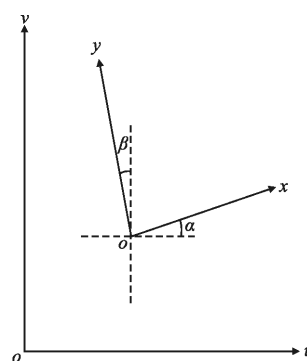


图 1 坐标变换模型

Fig.1 Coordinate transformation model

根据坐标变换的原理存在:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mx \\ ny \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

令 $a_1=m\cos\alpha, b_1=-n\sin\alpha, a_2=m\sin\beta, b_2=n\cos\beta$, 则由上式可得:

$$\begin{cases} u=a_1x+b_1y+c_1 \\ v=a_2x+b_2y+c_2 \end{cases} \quad (2)$$

公式(2)为 CCD 图像坐标与切平面坐标的数据拟合模型,称之为仿射变换模型。由此看出在建立数据拟合模型过程中,要保证 CCD 图像坐标与切平面坐标位于相互平行的坐标系中。在粗调平状态下,CCD 平面与切平面之间存在不可忽略的倾斜角,对此需要将粗调平状态下的 CCD 平面与切平面进行修正,使 CCD 图像坐标与切平面坐标位于相互平行的坐标系中。

2 粗调平状态下的定位方法

2.1 水平状态 CCD 图像坐标的求解

高精度双轴倾角仪安装在数字天顶仪的镜筒上,随转台一起转动,经过较标的倾角仪的两敏感轴组成的平面与 CCD 平面平行,故倾角仪两敏感轴能够在不同拍摄位置测量出 CCD 平面相对于水平面倾斜分量 θ_1, θ_2 ,如图 2 所示。

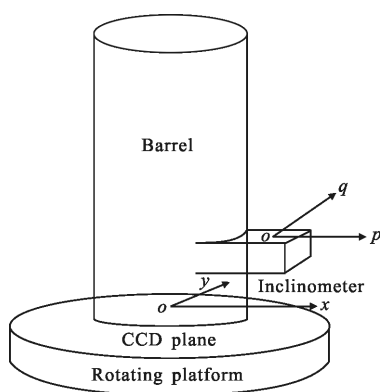


图 2 倾角仪安装示意图

Fig.2 Installation of inclinometer

经较标后的双轴倾角仪能够得到倾角仪 p 敏感轴与 CCD 图像坐标系 x 坐标轴之间的夹角 ϕ 、倾角仪两敏感轴之间的剪切角 ε 以及两敏感轴读数的比例系数 k_1, k_2 , 则 CCD 图像坐标系两坐标轴的倾斜分量为:

$$\begin{cases} \theta_1=k_1p\sin\phi+\cos\phi(k_2q-k_1p\cos\varepsilon)\sec\varepsilon \\ \theta_2=k_1p\cos\phi-\sin\phi(k_2q-k_1p\cos\varepsilon)\sec\varepsilon \end{cases} \quad (3)$$

式中: p, q 为倾角仪的输出值。

如图 3 所示,虚线框 N 为粗调平状态下的 CCD 平面, $o-xyz$ 为在粗调平状态下的 CCD 图像坐标系。实线框 M 为水平面, $o-x'y'z'$ 为水平状态下的 CCD 图像坐标系。CCD 图像坐标系的坐标原点在 CCD 敏感器中心, ox 轴与 ox' 轴, oy 与 oy' 轴分别与 CCD 敏感器的两条边平行, oz' 指向天顶方向。 AB 为倾斜平面与水平面之间的交线, 则 AB 垂直于 oz 轴与 oz' 轴。 T_x 轴为 ox 轴在水平面上的投影, T_y 轴为 oy 轴在水平面上的投影, T_x 轴与 T_y 轴不一定垂直。由精密双轴倾角仪测出粗调平状态下 CCD 图像坐标系两坐标轴与水平面之间的夹角为 θ_1, θ_2 , 即 $\angle xox'=\theta_1, \angle yoy'=\theta_2$ 。在粗调平状态下的 CCD 平面内, 设 $\angle Aox=\theta_3$, 则 $\angle Boy=\theta_4=\frac{\pi}{2}-\theta_3, \theta$ 为 CCD 平面在粗调平状态与水平状态之间的二面角。

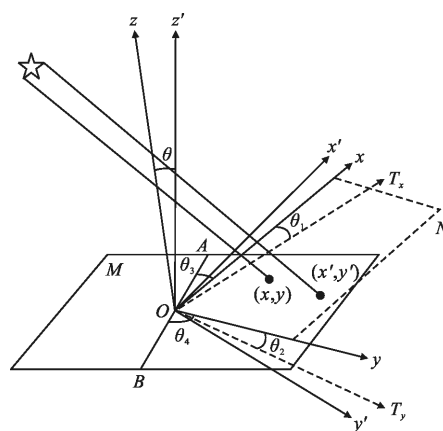


图 3 CCD 倾斜示意图

Fig.3 Diagram of CCD tilt

由二面角的相关定理可得:

$$\theta = \arcsin(\sqrt{\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2}) \quad (4)$$

由根据二面角的三正弦定理可得:

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_4} \quad (5)$$

将公式(4)代入公式(5)可得:

$$\begin{cases} \theta_3 = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta}\right) \\ \theta_4 = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta}\right) \end{cases} \quad (6)$$

在粗调平状态坐标系 $o-xyz$ 中, 存在单位矢量 $u=(-\cos\theta_3, \cos\theta_4, 0)$, 使得水平状态下的 CCD 图像坐标系 $o-x'y'z'$ 绕单位矢量 u 旋转 θ 角可与 $o-xyz$ 坐标系重合。根据四元数相关定理^[8], 可知存在:

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} + (-\cos \theta_3 i + \cos \theta_4 j) \sin \frac{\theta}{2} \quad (7)$$

令 $q_0 = \cos \frac{\theta}{2}, q_1 = -\cos \theta_3 \sin \frac{\theta}{2}, q_2 = \cos \theta_4 \sin \frac{\theta}{2}$, 可

由四元数 Q 确定出由水平状态下的 CCD 图像坐标系 $o-x'y'z'$ 至粗调平状态下的 CCD 图像坐标系 $o-xyz$ 的坐标变换矩阵 C :

$$C = \begin{bmatrix} 1-2q_2^2 & 2q_1q_2 & 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 & 1-2q_1^2 & -2q_0q_1 \\ -2q_0q_2 & 2q_0q_1 & 1-2(q_1^2+q_2^2) \end{bmatrix} \quad (8)$$

则由粗调平状态下的 CCD 图像坐标系 $o-xyz$ 至水平状态下的 CCD 图像坐标系 $o-x'y'z'$ 的坐标

变换矩阵为 C^{-1} , 令 $C^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$, 在粗调平状

态坐标系 $o-xyz$ 中存在方向矢量 $r=(x, y, -f)$ 满足:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xc_{11}+yc_{12}-fc_{13} \\ xc_{21}+yc_{22}-fc_{23} \\ xc_{31}+yc_{32}-fc_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

由于可认为恒星位于无穷远处, 发出的星光为平行光, 则在水平状态 $o-x'y'z'$ 标系中存在方向矢量 $r'=(x', y', -f)$ 满足:

$$\frac{x'}{xc_{11}+yc_{12}-fc_{13}} = \frac{y'}{xc_{21}+yc_{22}-fc_{23}} = \frac{-f}{xc_{31}+yc_{32}-fc_{33}} \quad (10)$$

化简上式可得:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{-f(xc_{11}+yc_{12}-fc_{13})}{xc_{31}+yc_{32}-fc_{33}} \\ y' &= \frac{-f(xc_{21}+yc_{22}-fc_{23})}{xc_{31}+yc_{32}-fc_{33}} \end{aligned} \quad (11)$$

公式(11)为水平状态 CCD 图像坐标的计算表达式, 也可称之为粗调平状态 CCD 图像坐标的修正模型。由上式可知, 利用倾角仪的输出值与粗调平状态下的 CCD 图像坐标可计算得到恒星成像在水平状态下的 CCD 图像坐标。

2.2 粗调平状态切平面坐标的分析

粗调平状态与水平状态相比, 数字天顶仪旋转轴与天球的交点存在偏移, 如图 4 所示, 实线框为水

平状态数字天顶仪对应的切平面, 虚线框为粗调平状态下数字天顶仪对应的切平面。

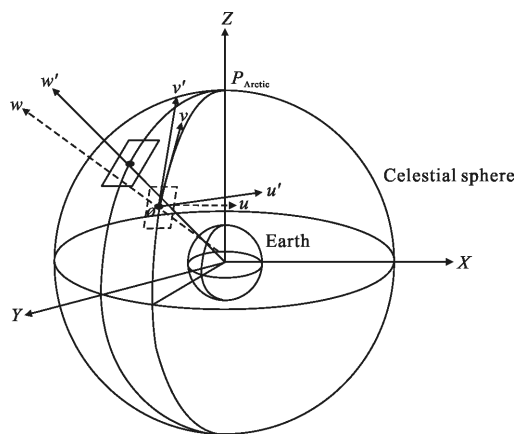


图 4 拍摄的天区

Fig.4 Sky coverage

双轴倾角仪能够实现对旋转轴倾斜分量的测量, 从而实现旋转轴天文经纬度的倾斜补偿。由参考文献[9]可知数字天顶仪旋转轴天文经纬度的倾斜补偿值($\Delta\Phi, \Delta\Lambda$)可按式计算:

$$\Delta\Phi = \frac{k_1 p \sin(A+\phi) + \cos(A+\phi)(k_2 q - k_1 p \cos \varepsilon) \sec \varepsilon}{\cos(\Lambda)} \quad (12)$$

$$\Delta\Lambda = k_1 p \cos(A+\phi) - \sin(A+\phi)(k_2 q - k_1 p \cos \varepsilon) \sec \varepsilon$$

式中: Λ 为数字天顶仪旋转轴的天文纬度; A 为 CCD 图像坐标系与切平面坐标系之间的方位角。

如图 4 所示, 粗调平状态下天球切平面坐标系 $o-uvw$ 可通过先绕 ou 轴旋转 $\Delta\Lambda$ 角, 再绕 ov 轴旋转 $\Delta\Phi$ 角可得到与水平状态下切平面平行的坐标系 $o-u'v'w'$, 则存在方向余弦矩阵 R , 将粗调平状态下的切平面坐标 $(u, u, 0)$ 转化到与水平状态下切平面平行的坐标系 $o-u'v'w'$ 中, 即:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Delta\Lambda) & \sin(\Delta\Lambda) \\ 0 & -\sin(\Delta\Lambda) & \cos(\Delta\Lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\Delta\Phi) & 0 & -\sin(\Delta\Phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\Delta\Phi) & 0 & \cos(\Delta\Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (13)$$

由上式可得:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\Phi) & 0 & -\sin(\Delta\Phi) \\ \sin(\Delta\Phi)\sin(\Delta\Lambda) & \cos(\Delta\Lambda) & \cos(\Delta\Phi)\sin(\Delta\Lambda) \\ \sin(\Delta\Phi)\cos(\Delta\Lambda) & -\sin(\Delta\Lambda) & \cos(\Delta\Phi)\cos(\Delta\Lambda) \end{bmatrix}$$

化简公式(13)可得:

$$\begin{cases} u' = u \cos(\Delta\Phi) \\ v' = u \sin(\Delta\Phi) \sin(\Delta\Lambda) + v \cos(\Delta\Lambda) \end{cases} \quad (14)$$

通过公式(14)可以得到恒星在与水平状态下切平面平行的坐标系中的坐标(u', v')。

实验结果表明,在粗调平状态下,旋转轴天文经纬度倾斜补偿量很小,如表 1 所示。则公式(14)可化简为:

$$\begin{cases} u' = u \\ v' = v \end{cases} \quad (15)$$

表 1 倾角仪输出值及倾角补偿值

Tab.1 Inclinator output value and tilt angle compensation

No.	$\theta_1/(\text{''})$	$\theta_2/(\text{''})$	$\Delta\Phi/(\text{''})$	$\Delta\Lambda/(\text{''})$
1	117.865	130.634	125.211	142.124
2	93.553	40.569	102.793	56.172
3	118.161	84.686	160.915	-58.398
4	98.430	142.325	5.713	-172.851
5	-117.520	126.810	-179.736	88.549
6	-7.7592	144.320	-141.347	85.275
7	-29.928	82.469	14.744	86.909
8	5.986	26.603	11.509	25.557

由表 1 可知,在粗调平状态下,数字天顶仪旋转轴天文经纬度的倾斜补偿 很小,都在角秒级,保证了公式(15)准确性。表明在粗调平状态下恒星的天球切平面坐标可直接用于建立数据拟合模型。

2.3 粗调平定位方法

2.3.1 数据拟合模型参数的求解

求解数据拟合模型的参数,是数字天顶仪定位过程中的关键一步,参数解越准确,数据拟合模型越准确,越能保证数字天顶仪的定位精度。参数的求解通常采用最小二乘法的方式进行^[5,7],然而由于受实际测量条件的影响,例如天气不良,大气折射等原因,易导致星图误识别,使得数字天顶仪采集的数据存在粗大误差。最小二乘法不具有抗干扰性的优点,继续使用最小二乘法求解数据拟合模型的参数,使得参数解受到误差星点的影响,进而使得到的数据拟合模型不准确。对此文中引入抗差估计的原理^[10-12],抗差估计也称之为稳健估计,具有抑制粗大误差的优点,采用抗差最小二乘解的方式求解参数,可抑制

星图误识别等原因带来的粗大误差对参数解的影响,提高数据拟合模型的准确性。由公式(2)得残差值的表达式为:

$$V = A\hat{X} - L \quad (16)$$

式中: $V=[v_1, v_2, \dots, v_{2i}]^T$ 为观测值残差向量,下标 i 为

$$\text{星图识别出恒星的数量; } A = \begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i' & y_i' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_i' & y_i' & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x_i' & y_i' & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2i \times 6}$$

为系数矩阵,其元素(x_i', y_i')为水平状态下 CCD 图像坐标; $\hat{X}=[a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2]^T$ 为未知参数构成的向量; $L=[u_1, u_1, \dots, u_i, v_1, v_2, \dots, v_i]^T$ 为切平面坐标构成的向量。根据抗差 M 估计的原理,将先验权矩阵 P 用等价权矩阵 \bar{P} 代替,可得未知参数 \hat{X} 的抗差 M 估计为:

$$\hat{X} = (A^T \bar{P} A)^{-1} A^T \bar{P} L \quad (17)$$

求解公式(17)可采用迭代计算方法,假设第 k 个算出等价权矩阵为 \bar{P}_k ,那么第 $k+1$ 个未知参数 \hat{X}_{k+1} 的抗差 M 估计为:

$$\hat{X}_{k+1} = (A^T \bar{P}_k A)^{-1} A^T \bar{P}_k L \quad (18)$$

未知参数的抗差 M 估计求解的关键是求解未知参数 \hat{X} 进行公式(18)迭代计算的初始等价权矩阵 \bar{P}_1 ,具体迭代过程如下:

(1) 数字天顶仪拍摄的恒星时,恒星的观测值相互独立,先验权矩阵 P 为对角矩阵。再根据各恒星切平面坐标所占的权重可得先验权矩阵: $P =$

$$\begin{bmatrix} P_1 & & & & & & 0 \\ & P_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & P_i \end{bmatrix}_{2i \times 6}$$

矩阵 P 的元素 P_i 为切平面坐标

的权重因子。

(2) 根据最小二乘法 LS 计算未知参数初值 \hat{X}_1 ,即 $\hat{X} = A^{-1}L$,由未知参数初值 \hat{X}_1 代入公式(16)计算观测值残差向量中 $V=[v_1, v_2, \dots, v_{2i}]^T$ 。

(3) 由第(2)步算出的观测值残差向量 V 与第(1)步

算出的先验权矩阵构造初始等价权矩阵 \bar{P}_1 , 其中元素分别为 $\bar{P}_i = \frac{P_i}{v_i}, i=1, 2, \dots, 2i$ 。

(4) 将第(3)步构造的初始等价权 \bar{P}_1 代入公式(17)求得 \hat{X}_2 , 再将 \hat{X}_2 代入公式(16)可求得 $V=[v_1, v_2, \dots, v_{2i}]^T$, 数字天顶仪观测星点之间互不影响, 可按 IGG III 方案确定等价权函数^[13], 即:

$$\bar{P}(v_i) = \begin{cases} p_i & |v_i| \leq k_0 \\ p_i \frac{k_0}{|v_i|} \left(\frac{k_1 - |v_i|}{k_1 - k_0} \right) & k_0 < |v_i| \leq k_1 \\ 0 & k_1 < |v_i| \end{cases} \quad (19)$$

公式(19)中 k_0 和 k_1 一般取值为 1.5~3.0。

(5) 将第(4)步求得的等价权函数继续构造等价权矩阵 \bar{P}_2 , 并将其代入公式(18)算出 \hat{X}_3 , 再将 \hat{X}_3 代入公式(16)算 $V=[v_1, v_2, \dots, v_{2i}]^T$ 。

(6) 利用第(5)步算出的残差值 V 返回第(4)步构造等价权矩阵 \bar{P}_3 进行计算 \hat{X}_4 , 以此类推, 直至连续两次解算出的残差值 V 的 $\|V\|_2$ 范数之差小于某一阈值时可终止迭代过程。

采用抗差最小二乘解的方式算出数据拟合模型的参数, 抑制了误差星点带来的影响, 使得数据拟合模型进一步准确, 更加准确地反映 CCD 图像坐标与切平面坐标之间的映射关系, 进一步保证粗调平状态下数字天顶仪的定位精度。

2.3.2 迭代过程的优化

原定位方法中时间补偿方式限制了定位算法的灵活性, 为提高数字天顶仪定位的效率, 在星图识别结束后就将恒星的天球坐标作时间补偿, 将恒星的天球坐标转换到与地球固联的坐标系中^[14], 假设经时间补偿后恒星天文经纬为 (Φ_i, Λ_i) , 恒星的切平面坐标按下式计算:

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{-\sin(\Phi_i - \Phi)}{\sin \Lambda \tan \Lambda_i + \cos \Lambda \cos(\Phi_i - \Phi)} \\ v_i &= \frac{\cos \Phi_i \tan \Lambda_i - \sin \Phi_i \cos(\Phi_i - \Phi)}{\sin \Lambda \tan \Lambda_i + \cos \Lambda \cos(\Phi_i - \Phi)} \end{aligned} \quad (20)$$

其反变换为:

$$\begin{cases} \Phi_i = \Phi + \arctan \frac{v_i}{\cot \Lambda - u_i \sin \Lambda} \\ \Lambda_i = \arctan \frac{(u_i + \tan \Lambda) \cos(\Phi_i - \Phi)}{1 - u_i \tan \Lambda} \end{cases} \quad (21)$$

公式(20)与公式(21)中, (Φ, Λ) 为旋转轴的天文

经纬度, 其值会在以后的迭代计算中更新, 其初值为 GPS 提供的概略位置。

由第 2.1 节和第 2.2 节所述, 可认为水平状态下的 CCD 图像坐标与切平面坐标位于相互平行的坐标系中, 可按精调平状态下的定位迭代过程进行定位解算, 但对于传统的数字天顶仪定位方法, 每一次迭代过程需要将数据拟合模型变换及其反变换, 切平面变换及其反变换各进行一次计算, 计算过程复杂, 导致了计算效率低的问题^[6]。由参考文献[14]可知通过剔除切平面变换和切平面反变换的方式对定位迭代过程进行优化, 虽然定位效率得到较大的提高, 但是定位精度并没有得到显著的提高。原因在于数字天顶仪定位迭代过程中, 每一次迭代过程都会更新数据拟合模型, 而数据拟合模型的建立与切平面坐标有关。由参考文献[1, 5, 14]中可知切平面坐标计算式可知切平面坐标与每次迭代算出的旋转轴天文坐标 (Φ, Λ) 有关, 若剔除了切平面反变换, 每次迭代将不能得到旋转轴的天文经纬度 (Φ, Λ) , 使得每次迭代过程中的数据拟合模型都保持不变, 从而使数字天顶仪的定位精度受影响。对此文中在采用以下三种方式对原有的算法进行改进, 即能提高了定位解算的效率, 又能保证数字天顶仪的定位精度。一是考虑到建立数值拟合模型需要用到每次迭代算出的旋转轴天文坐标 (Φ, Λ) , 故在迭代过程中通过剔除数据拟合模型反变换而保留切平面变换和切平面反变换的方式来改进定位算法, 使得每次迭代产生的 (Φ, Λ) 再返回公式(20)重新计算切平面坐标, 进而重新建立数据拟合模型, 使得数据拟合在每次迭代过程中都会得到更新, 确保数字天顶仪的定位的精度; 二是考虑到粗调平状态下数字天顶仪旋转轴的 CCD 图像坐标并不位于 CCD 敏感器的中心, 继续选取 CCD 敏感器的中心坐标 $(0, 0)$ 作为迭代计算的初值, 会使迭代的次数增多。故采用联立数据拟合模型方程组解算旋转轴的 CCD 图像坐标为每次迭代过程的初值, 由此减少迭代次数; 三是对于旋转轴天文坐标的解算, 传统做法是通过将对称位置旋转轴的切平面坐标代入切平面反变换得到旋转轴的天文经纬度, 再将得到的天文经纬度求平均得到旋转轴的天文经纬度。此过程进行了两次切平面反变换, 对此文中先通过将对称位置切平面坐标求平均, 再利用得到的平均值代入切平面反变换得到旋转轴的

天文经纬度,采用此做法,每次迭代过程只需进行一次切平面反变换,提高了定位解算的效率。综上,具体定位过程如下:

(1) 数字天顶仪对称位置拍摄星图后进行星图识别,并进行时间补偿可得到恒星像点坐标 (x, y) 和恒星的天文坐标 (Φ, Λ) 。

(2) 按公式(11)和公式(20)分别计算得到水平状态下的 CCD 图像坐标 (x', y') 和切平面坐标 (u, v) ,其中在迭代初始时刻,切平面坐标的计算是在 GPS 提供的概率位置的基础上进行的。

(3) 按公式(2)构造仿射变换模型,按第 2.3.1 节的抗差最小二乘法求解模型参数。

(4) 由第(3)步得到的仿射变换模型联立方程组计算 CCD 中心坐标,如下式:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + b_1^1 y^1 + c_1^1 = a_1^2 x^2 + b_1^2 y^2 + c_1^2 \\ a_2^1 x^1 + b_2^1 y^1 + c_2^1 = a_2^2 x^2 + b_2^2 y^2 + c_2^2 \end{cases} \quad (22)$$

由公式(22)计算出旋转轴的 CCD 图像坐标 (x_c, y_c) 。

(5) 将 (x_c, y_c) 代入对称位置的仿射变换模型计算出 $(u, v)_1$ 和 $(u, v)_2$,并计算出平均值 $(u, v)_{\text{average}}$ 。

(6) 将 $(u, v)_{\text{average}}$ 代入切平面反变换公式(21)得到旋转轴的天文坐标 (Φ, Λ) 。

(7) 判断连续两次计算得到的天文坐标 (Φ, Λ) 之差是否小于某一阈值(如 $0.000\ 01^\circ$),若不小于给定的阈值,返回第(2)步,否则执行下一步。

(8) 将第(7)步得到的天文坐标进行倾角补偿^[14],即可得到最终目标点的位置信息 $(\Phi_{\text{end}}, \Lambda_{\text{end}})$ 。

3 误差分析

3.1 数据拟合误差

数字天顶仪定位过程中,数据拟合模型是建立恒星天球切平面坐标与 CCD 图像坐标之间的映射关系,由第 2.3.1 节可知,采用抗差 M 估计的最小二乘法可抑制粗大误差对参数解的影响,为评估数据拟合模型的准确性,可对数据拟合模型的残差值进行分析,假设采用抗差 M 估计得到的参数解为 \hat{X} ,则残差值为:

$$V = A\hat{X} - L \quad (23)$$

通过分析残差 V 的分布情况、均值和最大值可实现对数据拟合模型的误差进行分析。

3.2 定位误差

影响数字天顶仪定位精度的因素有很多,当前已有较多文献对此进行了研究,其中参考文献[15]对转台转位误差对定位结果的影响进行了分析,文中从倾斜修正模型出发,针对修正误差对定位结果的影响进行了分析。由公式(11)可知,对 CCD 图像坐标的修正引入了焦距 f 和倾角仪的输出值,若这两个变量存在误差将会对 CCD 图像坐标的修正结果产生影响,进而造成数字天顶仪的定位误差。

首先考虑焦距误差对定位结果的影响,由参考文献[4]和[16]可知,焦距变化会影响恒星像点的 CCD 图像坐标,假设焦距变化值为 Δf ,引起的恒星成像在 CCD 平面上的坐标变化值为 $(\Delta x, \Delta y)$,分别将 Δf 和 $(\Delta x, \Delta y)$ 代入公式(11),按泰勒展开式展开,取一阶项,可得因焦距误差引起的 CCD 图像坐标修正误差为:

$$\begin{aligned} \Delta x_1' &= -\frac{1}{a_2}(\Delta x c_{31} + \Delta y c_{32} - \Delta f c_{33})(f(x c_{11} + y c_{12} - f c_{13})) - \\ &\quad \frac{1}{a} (c_{11}(f\Delta x + x\Delta f) + c_{12}(f\Delta y + y\Delta f) - 2f\Delta f c_{13}) \\ \Delta y_1' &= -\frac{1}{a_2}(\Delta x c_{31} + \Delta y c_{32} - \Delta f c_{33})(f(x c_{21} + y c_{22} - f c_{23})) - \\ &\quad \frac{1}{a} (c_{21}(f\Delta x + x\Delta f) + c_{22}(f\Delta y + y\Delta f) - 2f\Delta f c_{23}) \end{aligned} \quad (24)$$

式中: $a = x c_{31} + y c_{32} - f c_{33}$ 。

其次考虑测角误差对倾斜修正的影响,假设测角误差引起四元数坐标变换矩阵元素的变化值为 $\Delta c_{11}, \Delta c_{12}, \Delta c_{13}, \Delta c_{21}, \Delta c_{22}, \Delta c_{23}, \Delta c_{31}, \Delta c_{32}, \Delta c_{33}$ 将其代入公式(11),继续用泰勒式展开,取一阶项,可得因测角误差引起的 CCD 图像坐标修正误差为:

$$\begin{aligned} \Delta x_2' &= \frac{-f}{a_2}(x\Delta c_{31} + y\Delta c_{32} - f\Delta c_{33})(x c_{11} + y c_{12} - f c_{13}) + \\ &\quad \frac{-f}{a}(x\Delta c_{11} + y\Delta c_{12} - f\Delta c_{13}) \\ \Delta y_2' &= \frac{-f}{a_2}(x\Delta c_{31} + y\Delta c_{32} - f\Delta c_{33})(x c_{21} + y c_{22} - f c_{23}) + \\ &\quad \frac{-f}{a}(x\Delta c_{21} + y\Delta c_{22} - f\Delta c_{23}) \end{aligned} \quad (25)$$

4 实验结果分析

在实验过程中数字天顶仪采用的 CCD 敏感器型号为 KAF-16803,其大小为 $4\ 096\ \text{pixel} \times 4\ 096\ \text{pixel}$,单个像素大小为 $9\ \mu\text{m} \times 9\ \mu\text{m}$,焦距值为 $600 \pm 4\ \text{mm}$ 。

安装在镜筒上的倾角仪是徕卡 Nivel1210 型双轴倾角仪,倾角仪分辨率为 0.202"。采用顺时针和逆时针各拍摄 8 幅星图的方式进行定位,将 8 个对称位置解算单元作为一个定位循环,对粗调平状态下的一个定位循环进行分析。将拍摄的星图数据结合倾角仪的输出值将粗调平状态下 CCD 图像坐标修正至水平状态下的 CCD 图像坐标,这里仅给出一个对称位置拍摄星图部分结果,如表 2 和表 3 所示。

表 2 星图 1 的 CCD 图像坐标

Tab.2 CCD image coordinate of star map 1

Number	Rough leveling		After correction		Change value	
	x/pixel	y/pixel	x'/pixel	y'/pixel	Δx	Δy
1	2 052.039	3 800.590	1 998.762	3 780.922	53.277	19.668
2	3 061.167	3 813.400	3 007.87	3 793.711	53.297	19.689
3	2 662.788	3 604.969	2 609.502	3 585.292	53.286	19.677
4	1 436.975	3 291.399	1 383.696	3 271.747	53.279	19.652
5	3 491.367	2 422.311	3 438.063	2 402.649	53.304	19.662
Average value/pixel					53.288	19.669

表 3 星图 5 的 CCD 图像坐标

Tab.3 CCD image coordinate of star map 5

Number	Precision leveling		Rough leveling		Change value	
	x/pixel	y/pixel	x'/pixel	y'/pixel	Δx	Δy
6	2 271.705	140.912	2 247.669	90.448	24.036	50.464
7	965.091	3 811.261	941.065	3 760.813	24.026	50.448
8	2 649.449	3 787.823	2 625.395	3 737.360	24.054	50.463
9	224.233	1 026.475	200.152	976.029	24.081	50.447
10	1 832.163	3 702.352	1 808.126	3 651.900	24.037	50.452
Average value/pixel					24.046	50.455

由表 2、3 的结果可知,对于星图 1 而言,由粗调平状态修正至水平状态引起的 x 坐标变化值 Δx 都在平均值 53.288 pixel 左右, y 坐标变化值 Δy 都在平均值 19.669 pixel 左右;对于星图 5 而言, x 坐标变化值 Δx 都在平均值 24.046 pixel 左右, y 坐标变化值 Δy 都在平均值 50.455 pixel 左右,由此看出粗调平状态下,对称位置拍摄的星图,由于倾角仪输出值的不同,对 CCD 图像坐标影响也不相同,故如果不计算水平状态下 CCD 图像坐标,直接采用粗调平状态下像点的 CCD 图像坐标,将会严重影响数字天顶仪的

定位结果。

为形象展现出数据拟合误差,利用星图 1 中已识别的星点的信息并采用抗差最小二乘法进行数据拟合模型参数的解算,并将得到的参数解代入公式(23)得到残差值,结果如图 5 所示。

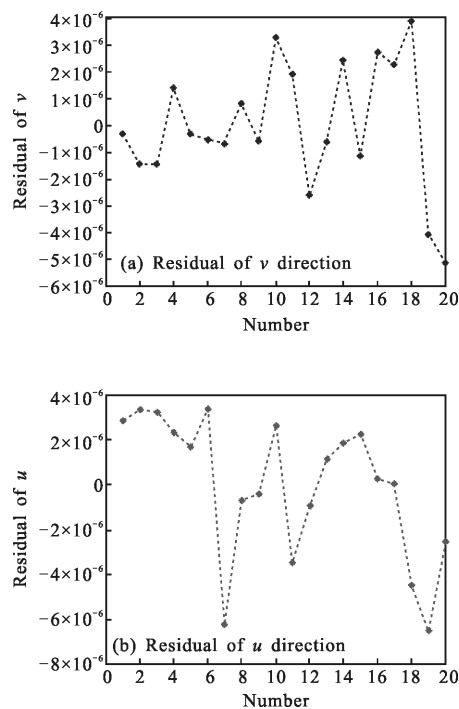
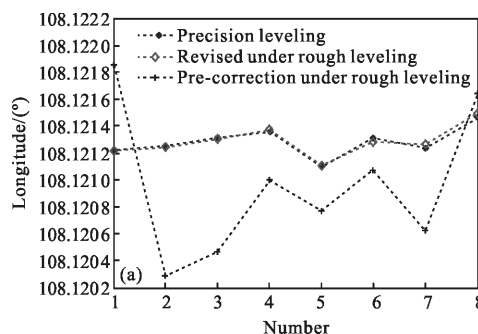


图 5 残差值

Fig.5 Residual value

由图 5 分析可知, v 方向最大残差值为 3.86×10^{-6} ,其平均值为 -7.82×10^{-6} , u 方向最大残差值为 3.35×10^{-6} ,其平均值为 -3.75×10^{-6} 。在两个方向上,残差值均分布在零附近,表明采用抗差最小二乘法的得到的数据拟合模型能够准确描述切平面坐标与 CCD 图像坐标之间的关系。

数字天顶仪在该定位循环的定位结果如图 6 所示。



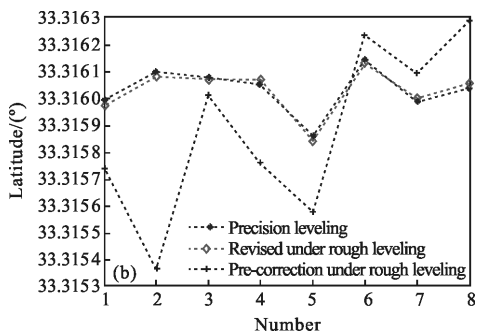


图 6 定位结果

Fig.6 Positioning result

由图 6 可知，经过修正后，利用水平状态下的

CCD 图像坐标进行定位,其定位结果曲线与精调平状态下的定位结果曲线基本重合,而未经 CCD 倾斜修正的定位结果与精调平状态下的定位曲线偏离较大。

为更好地说明数字天顶仪的定位精度,分别在粗调平状态和精调平状态对同一测站点进行定位解算,并任意选取了 3 个定位循环共 24 个解算单元进行分析,定位的具体结果如表 4 所示。

数字天顶仪的定位精度可由标准差评定^[5,17],由表 4 分析可知,精调平状态下定位经度精度为 0.287",纬度精度为 0.285",粗调平状态下的定位经度精度为 0.306",纬度精度为 0.292"。采用粗调平定位方法得到的定位精度与精调平定位方法的定位精

表 4 定位结果

Tab.4 Positioning result

No.	Precision leveling		Rough leveling		No.	Precision leveling		Rough leveling	
	Longitude/(°)	Latitude/(°)	Longitude/(°)	Latitude/(°)		Longitude/(°)	Latitude/(°)	Longitude/(°)	Latitude/(°)
1	108.121 227 2	33.315 993 0	108.121 216 9	33.315 973 4	13	108.121 165 6	33.315 965 2	108.121 298 8	33.315 966 4
2	108.121 253 9	33.316 100 6	108.121 241 8	33.316 081 9	14	108.121 369 3	33.316 025 9	108.121 232 5	33.316 144 1
3	108.121 314 3	33.316 080 7	108.121 304 5	33.316 069 7	15	108.121 239 9	33.315 980 0	108.121 215 6	33.316 013 6
4	108.121 361 5	33.316 053 9	108.121 378 4	33.316 070 8	16	108.121 389 5	33.316 100 5	108.121 378 5	33.316 080 0
5	108.121 097 9	33.315 862 2	108.121 111 8	33.315 842 6	17	108.121 28 95	33.315 966 5	108.121 289 6	33.316 000 2
6	108.121 315 0	33.316 143 1	108.121 284 9	33.316 133 1	18	108.121 266 5	33.316 199 6	108.121 356 8	33.315 995 7
7	108.121 235 7	33.315 987 9	108.121 267 7	33.316 001 5	19	108.121 254 6	33.316 033 6	108.121 399 9	33.316 069 7
8	108.121 465 1	33.316 039 6	108.121 495 2	33.316 059 3	20	108.121 337 0	33.316 055 9	108.121 315 6	33.316 002 3
9	108.121 225 7	33.315 988 8	108.121 320 1	33.315 900 3	21	108.121 396 6	33.315 989 7	108.121 122 6	33.315 869 9
10	108.121 258 9	33.316 025 9	108.121 296 9	33.316 150 0	22	108.121 265 6	33.316 199 7	108.121 300 0	33.316 115 9
11	108.121 353 2	33.316 125 5	108.121 321 6	33.316 032 7	23	108.121 289 6	33.316 011 3	108.121 203 3	33.316 066 3
12	108.121 326 5	33.316 068 9	108.121 362 6	33.316 098 8	24	108.121 256 5	33.316 032 3	108.121 393 6	33.316 036 9
Standard deviation/(")						0.287	0.285	0.306	0.292

度基本一致,满足数字天顶仪定位精度的要求。

为分析焦距误差和测角误差对数字天顶仪定位结果的影响,文中通过加入 $\Delta f=1\text{ mm}$ 的焦距误差以及在

倾角仪的两个输出值中分别加入 10"的测角中误差,然后对 CCD 图像坐标进行修正,将修正后的 CCD 图像坐标进行定位解算,定位精度如表 5 所示。

表 5 误差分析
Tab.5 Positioning accuracy

Error	1 mm		10"	
	Longitude/(")	Latitude/(")	Longitude/(")	Latitude/(")
Accuracy	0.531	0.492	0.559	0.502

由表 5 可知, 焦距误差与测角误差对数字天顶天顶仪的定位结果影响较大。焦距误差为 1 mm 时, 带来的定位经度误差为 0.225", 纬度误差为 0.2", 倾角仪输出值包含 10" 的误差带来的定位经度误差为 0.253", 纬度误差为 0.210"。

5 结论

通过修正 CCD 图像坐标, 采用抗差 M 估计解算数据拟合模型的参数、剔除迭代过程中的切平面变换以及切平面坐标求平均等方式得到粗调平状态下的定位方法, 其定位结果满足数字天顶仪定位精度的要求。压缩了精调平所需的时间, 提高了定位的效率。

参考文献:

[1] Hirt C, Bürki B, Guillaume S, et al. Digital zenith cameras-state-of-the-art astrogeodetic technology for Australian Geodesy [C]//FIG Congress-Remote Sensing and Optical Techniques I, 2010: 1-16.

[2] Hirt C, Seeber G. Accuracy analysis of vertical deflection data observed with the Hannover digital zenith camera system TZK2-D[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(6): 347-356.

[3] Hirt C, Reese B, Enslin H. On the accuracy of vertical deflection measurement using the high-precision digital zenith camera system TZK2 -D [C]//Gravity, Geoid and Space Mission, 2005: 197-201.

[4] Guo Min, Zhang Hongying. Application of CCD digital photography in astronomical positioning measurement [J]. *Geomatics Technology and Equipment*, 2005, 1 (7): 28-29.

(in Chinese)

[5] Wang Bo, Tian Lili, Wang Zheng, et al. The image and data processing in digital zenith camera [J]. *Chin Sci Bull*, 2014, 59(12): 1100-1107.

[6] Zhang Xihui, Zhou Zhaofa, Liu Xianyi, et al. Analysis of the fast positioning method of digital zenith camera in tilt state [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2018, 47 (2): 0217002. (in Chinese)

[7] Liu Xianyi, Zhou Zhaofa, Zhang Zhili, et al. Research on the transformation of coordinates astronomical fixation [J]. *Electronics Optics & Control*, 2016, 23(1): 11-14. (in Chinese)

[8] Qin Yongyaun. Inertial Navigation[M]. Beijing: Science Press, 2014: 244-252. (in Chinese)

[9] Zhou Zhaofa, Liu Xianyi, Zhang Zhili, et al. Research on two-axis tilt sensor based on digital zenith camera [J]. *Acta Photonic Sinica*, 2015, 44(8): 08120021. (in Chinese)

[10] Yanc Y, He H, Ru C. Adaptively robust filtering for kinematic geodetic positioning[J]. *Journal of Ueodesy*, 2001, 76(2): 109-116.

[11] Yang Y, Song I, Xu T. Robust estimator for correlated observations based on bifactor equivalent weights [J]. *Journal of Geodesy*, 2002, 76(6):353-358.

[12] Yang Yuanxi. Equivalent weight principle: parameter adjustment model robust least squares solution[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 1994, 42(6): 33-35. (in Chinese)

[13] Yang Yuanxi. Robust estimation and its influence function of surveying adjustment mode [J]. *Journal of the Institute of Surveying and Mapping*, 1994, 11(2): 77-82. (in Chinese)

[14] Zhang Xinshuai, Zhou Zhaofa, Huang Xianxiang. Improved positioning method for digital zenith camera[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(4): 1254-1259. (in Chinese)

[15] Zhang Zhili, Liu Xianyi, Zhou Zhaofa, et al. Influence of turntable error on axis error in digital zenith camera [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2015, 23(11): 3090-3096. (in Chinese)

[16] Liu Xianyi, Zhou Zhaofa, Zhang Zhili, et al. The application of spherical triangle method in digital zenith camera [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2015, 35(4): 726-728.

[17] Tian Lili, Guo Jinyun, Han Yanben, et al. Digital zenith telescope prototype of china [J]. *Chin Sci Bull*, 2014, 59 (12): 1094-1099.