

基于高阶非线性模型的多目标高光谱图像解混算法

甘士忠¹, 肖志涛¹, 陈雷², 南瑞杰¹

- (1. 天津工业大学 电子与信息工程学院, 天津 300387;
2. 天津商业大学 信息工程学院, 天津 300134)

摘要: 在高阶非线性混合模型的基础上, 提出一种多目标高光谱图像解混算法, 解决传统方法受高光谱数据异常值影响而解混精度不高的问题。该算法以重构误差与光谱角分布为目标函数建立优化模型, 并同时优化两目标函数以减少数据异常值对模型求解的影响, 使解混结果在两个评价指标上得到提升; 最后采用差分搜索算法求解多目标优化模型, 解决梯度类优化方法易陷入局部极值的问题, 从而进一步提升解混精度。实验结果表明, 文中算法与传统高光谱解混算法相比, 具有更精确的端元丰度估计结果和更高的解混精度。

关键词: 高光谱图像; 多线性混合模型; 多目标高光谱解混; 仿生智能优化; 差分搜索算法
中图分类号: TP751 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201948.1026002

Multi-objective hyperspectral unmixing algorithm based on high-order nonlinear mixing model

Gan Shizhong¹, Xiao Zhitao¹, Chen Lei², Nan Ruijie¹

- (1. School of Electronics and Information Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China;
2. School of Information Engineering, Tianjin University of Commerce, Tianjin 300134, China)

Abstract: Based on high-order nonlinear mixing model, a multi-objective hyperspectral unmixing algorithm was proposed, which solved the problem that the traditional method cannot obtain higher unmixing accuracy due to the outliers of hyperspectral image data. The proposed algorithm took the reconstruction error and spectral angle mapper as the objective functions and optimized them in order to reduce the outliers influence of hyperspectral data on the solution of optimization model and improve the two evaluation indicators. Then, the difference search algorithm was used to solve the multi-objective optimization model and overcame the tendency of the traditional gradient-based optimization method to fall into the local extremum problem and further improved the unmixing accuracy. The experiment results show that the proposed algorithm has more accurate endmembers abundance estimation and higher unmixing accuracy.

Key words: hyperspectral images; multi-linear mixing model; multi-objective hyperspectral unmixing; bionic intelligence optimization; difference search algorithm

收稿日期: 2019-06-11; 修订日期: 2019-07-21

基金项目: 国家自然科学基金(61401307); 中国博士后科学基金(2014M561184);

天津市应用基础与前沿技术研究计划项目(15JCYBJC17100)

作者简介: 甘士忠(1994-), 男, 硕士生, 主要从事高光谱图像处理和仿生智能计算方面的研究。Email: gan_shizhong@163.com

导师简介: 肖志涛(1971-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事图像处理与模式识别方面的研究。Email: xiaozhitao@tjpu.edu.cn

通讯作者: 陈雷(1980-), 男, 教授, 硕士生导师, 主要从事高光谱图像处理与盲信号处理方面的研究。Email: chenlei@139.com

0 引言

高光谱解混 (Hyperspectral Unmixing, HU) 是识别高光谱图像地物成分以及估计地物丰度的一项重要技术。由于高光谱传感器对光谱测量的分辨率有限, 传感器只能获得不同地物反射的混合光谱图像, 难以达到地物识别的需求。同时, 高光谱解混问题存在较多的局部最优解^[1], 是遥感图像处理领域中十分具有挑战性的研究问题^[2]。目前, 高光谱解混方法主要包括基于线性混合模型和非线性混合模型的解混算法。

线性混合模型 (Linear Mixing Model, LMM) 假设传感器观测的混合光谱是由不同地物(又称端元)按照各自的所占比例(又称丰度)线性组合而成。根据光谱的物理特性, LMM 需要满足两个丰度约束条件: 一是每个端元的丰度值非负 (Abundance Nonnegative Constraint, ANC); 二是各个端元的丰度之和等于 1 (Abundance Sum-to-one Constraint, ASC)。LMM 以简洁的数学模型直观地阐述了高光谱混合过程, 被广泛应用于遥感图像处理问题中。但是在实际场景中光谱常发生散射现象, 反射光谱之间存在相互影响, LMM 不再能合理阐述这些物理现象, 限制了解混精度的进一步提升。因此, 许多学者开始研究基于非线性混合模型的高光谱解混方法^[3]。

非线性混合模型 (Nonlinear Mixing Model, NLMM) 主要根据端元之间的相互影响刻画高光谱混合模型的非线性特征。例如, 基于辐射理论 (Radiosity Theory, RT)^[4] 的 Canopy 模型^[5]、Shkuratov 模型^[6]和Hapke 模型^[7]。这类模型能够刻画光线在地物表面发生的多散射现象, 但是存在较高的计算复杂度^[8]。另一类非线性混合模型主要基于端元之间的二次相互影响。例如, Fan 模型 (Fan Model, FM)^[9]、广义双线性模型 (Generalized Bilinear Model, GBM)^[10]、后非线性混合模型 (Polynomial Post-nonlinear Model, PPNM)^[11], 这类模型被称为双线性混合模型。与前者相比, 双线性混合模型具有更简洁的数学形式和较低的计算复杂度, 同时具有更直观的物理意义。但在实际场景中, 地物表面结构十分复杂, 端元之间的相互影响往往存在更高阶的非线性特征^[12-13], 双线性混合模

型仍然难以满足复杂场景中的光谱混合要求。

最新提出的多线性混合模型 (Multilinear Mixing Model, MLM)^[13] 基于马尔可夫随机过程思想, 仅通过较少的参数便能够阐述复杂场景下的光谱多反射现象, 其解混效果明显优于其他混合模型。然而, 在真实高光谱图像数据中, 大约有 20% 的波段受水汽和大气影响, 使得高光谱图像存在较大的噪声和异常值^[14-15], 限制了基于 MLM 以及其它混合模型的高光谱图像解混方法解混精度的提高。

此外, 高光谱解混问题通常被转化为优化问题, 基于 MLM 的解混算法与其他算法主要采用基于梯度的优化算法进行求解。但高光谱优化模型往往存在较多的局部最优解, 基于梯度的优化算法易陷入局部极值, 解混精度相对较低。同时随着模型复杂度增加, 求解难度越来越高, 采用传统基于梯度的优化算法难以获得更高的解混精度。

针对以上问题, 文中提出了一种基于 MLM 的多目标高光谱图像解混算法。为降低异常值和噪声对解混精度的影响, 文中以光谱重构误差与光谱角分布为目标函数, 建立多目标优化模型, 并采用差分搜索算法求解多目标优化模型, 避免陷入局部极值。

1 高光谱多线性混合模型

MLM 是最近提出的高阶非线性混合模型, 能有效刻画复杂场景下的光谱混合特征, 满足光谱在实际场景中深层次的混合要求, 更加贴近实际物理意义。MLM 的数学模型可以表示为:

$$y = (1-P)Ma + (1-P)P(Ma)^2 + (1-P)P^2(Ma)^3 + \dots \quad (1)$$

式中: $y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ 为观测得到的具有 N 个像素点的高光谱混合图像数据; $M = \{m_1, m_2, \dots, m_R\}$ 为 R 个端元, 每个端元的波段长度为 L ; $a = \{a_1, a_2, \dots, a_R\}$ 为各个端元在不同像素点中的丰度; P 表示高阶交互反射影响的发生概率; $(1-P)$ 表示光谱被观测到的概率。MLM 仍需满足 ASC 和 ANC 两个约束条件:

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^R a_{i,r} = 1, \forall i \in N \\ a_{i,r} > 0, \forall i \in N, r \in R \end{cases} \quad (2)$$

进一步可将公式(1)化简为:

$$y = \frac{(1-P)Ma}{1-PMa} \quad (3)$$

由公式 (3) 可以看出,MLM 仅使用一个参数 P 便刻画了高光谱的高阶非线性混合特征,当 $P=0$ 时,MLM 转化为线性混合模型。

基于 MLM 的高光谱解混算法,存在两个问题:(1) 该算法仍然以重构误差为单目标函数,易受高光谱图像数据中的异常值影响,难以获得高精度的端元估计结果;(2) 该算法的本质是基于梯度的优化方法,易陷入局部极值,解混精度较低。

2 多目标高光谱解混模型

基于 MLM 以及其它混合模型的高光谱解混算法主要采用以重构误差(Reconstruction Error, RE)^[16] 为单目标函数的优化方法,RE 的数学表达式如公式(4)所示,表示经过混合模型重构的光谱图像与实际光谱图像之间的误差。

$$RE = \sqrt{\frac{1}{NL} \sum_{i=1}^N \|y_i - \hat{y}_i\|^2} \quad (4)$$

式中: N 为高光谱图像的像素个数; y_i 和 \hat{y}_i 分别是高光谱图像中第 i 个像素点的真实观测值与估计值; L 是光谱波段长度。

然而,高光谱数据存在较多的异常值,导致高光谱解混的端元丰度估计结果不准确,异常值对直线拟合影响关系如图 1 所示,图中蓝色虚线表示重构误差,绿色实线表示余弦相似度,异常值的偏离程度为异常点偏离实际位置的欧式距离。随着异常值的偏离程度增加,单目标优化方法必然导致重构误差逐渐增大,同时也伴随着预测结果与实际数据的余弦相似度减小。

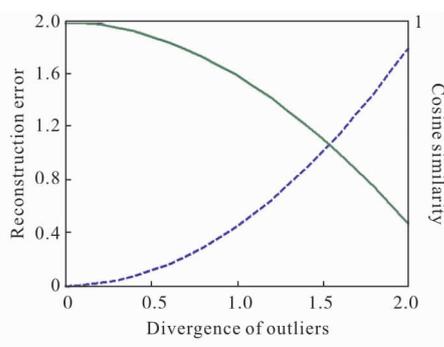


图 1 异常值对直线拟合影响示意图

Fig.1 Illustration of linear regression over outliers

因此,针对高光谱图像数据存在大量的异常值问题,可以建立以重构误差与余弦相似度为目标函数的多目标优化模型,通过最大化真实结果与预测结果的余弦相似度来减少数据异常值对模型优化求解的影响。而余弦相似度可以通过求反余弦值,将其转化为光谱角分布 (Spectral Angle Mapper, SAM)^[17], SAM 数学定义如下:

$$SAM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \arccos \frac{\langle y_i, \hat{y}_i \rangle}{\|y_i\| \|\hat{y}_i\|} \quad (5)$$

以 RE 和 SAM 为优化目标函数 f_1 和 f_2 ,对于每一个像素点建立多目标优化模型,同时使端元丰度满足 ASC 和 ANC 两个约束条件,得到多目标优化模型如下:

$$\hat{\theta} = \underset{a, P}{\operatorname{argmin}} (f_1, f_2), \text{ s.t. ASC, ANC} \quad (6)$$

式中: $f_1 = \|y_i - \hat{y}_i\|^2, f_2 = \arccos \frac{\langle y_i, \hat{y}_i \rangle}{\|y_i\| \|\hat{y}_i\|}$ 。

传统的高光谱解混优化模型,往往存在多个局部最优解,采用基于梯度类优化算法难以获得更优的解混精度。同时,多目标优化模型往往存在多个 Pareto 解,解混难度进一步增加。因此,文中提出了一种基于仿生智能优化方法的多目标解混算法。

3 基于差分搜索的高光谱解混算法

3.1 差分搜索算法

仿生智能优化算法具有收敛性好、求解精度高的特点,基于该算法的解混方法显著优于传统梯度类算法^[8,18]。因此,文中针对多目标优化模型采用寻优能力更强、收敛速度快的差分搜索(Differential Search, DS)^[19]算法进行求解。DS 算法是新提出的一种仿生智能优化算法,其寻优能力明显优于 DE^[20]、ABC^[21]、GA^[22]等算法。

DS 算法模拟种群迁移过程,以种群所在的地理位置作为优化问题的可行解,以优化目标函数作为种群栖息在该位置的适应度值,通过不断地寻找最优的栖息地来获得优化问题的最优解。在 DS 算法中,种群 N 个个体位置表示为: $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD}\}$,

$i=1, 2, \dots, N, D$ 等于优化问题的待求参数的个数。具体算法流程如下:

(1) 初始化种群: 种群个体按照公式(7)随机初始化种群个体位置:

$$x_{i,j} = \text{rand}(up_j - low_j) + low_j \quad (7)$$

式中: low_j 和 up_j 表示种群搜索空间的边界。

(2) 初始化参数: DS 算法中包含两个控制参数, 和扰动参数 p_1, p_2 , 按照公式(8)、(9)进行初始化:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.3\text{rand}_1 \\ p_2 &= 0.3\text{rand}_2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$Scale = \text{randg}[2\text{rand}_3](\text{rand}_4 - \text{rand}_5) \quad (9)$$

式中: randg 为服从伽马分布的随机数, $\text{rand}_i (i=1, 2, \dots, 5)$ 是服从均匀分布的随机数。

(3) 种群迁移: 种群个体被随机地选择去参加新栖息地的探索, 并按照 $donor_i$ 方向进行搜索, 途经的地方被记为 $stopoversite_i$, 按照公式(10)进行更新:

$$stopoversite_i = X_i + Scale(donor_i - X_i) \quad (10)$$

式中: $donor_i = X_{\text{random_shuffling}(i)}$ 为被随机选择的种群个体位置。

(4) 计算适应度值: 迁移后的种群个体, 按照 Brownian-like random walk 过程, 被随机选择参加栖息地的搜索, 该过程中的控制参数为公式(8)中的 p_1 和 p_2 。被选择的个体如果超出边界, 按照公式(7)重新生成。最后得到种群个体按照目标函数计算其适应度值, 如果适应度值更优, 则种群个体位置 X_i 被 $stopoversite_i$ 替换, 否则保持不变。种群个体按照步骤(2)~(4)不断进化, 直至达到最大进化次数而停止。

3.2 多目标高光谱图像解混算法

在高光谱解混之前, 首先采用 VCA 算法进行端元提取^[23], 然后进行多目标优化模型求解。而该模型存在多个帕累托解, 需要确定一个解作为最终结果。因此, 文中通过对目标函数加权, 使获得的最优解更倾向于权重系数大的目标函数, 如公式(11)所示:

$$\text{argmin}_{a, p} (\alpha \cdot f_1 + (1-\alpha) \cdot f_2) \quad (11)$$

式中: $\alpha \in [0, 1]$ 为权重系数, 当 $\alpha=1$ 时, 该模型转化为以 RE 为单目标函数的优化模型。

在算法求解过程中, 以公式(11)作为适应度值的

评价标准。结合 DS 算法过程, 基于 MLM 的多目标解混算法 (Multi-objective Differential Search, MODS) 具体步骤如下:

(1) 采用 VCA 方法获取端元 M ;

(2) 根据端元个数以及参数确定问题维度 D , 并按照公式(7)初始化种群个体位置 X_i ;

(3) 根据公式(8)和公式(9)分别初始化控制参数 p_1, p_2 和扰动参数 $Scale$;

(4) 按照公式(10)朝着 $donor_i$ 方向更新种群个体位置;

(5) 判断种群个体是否满足搜索空间要求, 如果超出搜索边界按照公式(7)重新生成位置;

(6) 对种群位置 X_i 进行归一化, 使其满足 ASC 和 ANC 约束条件;

(7) 计算适应度值 $fitness_i$, 如果值更小, 则 $X_i = stopoversite_i$ 令, 否则保持不变;

(8) 重复上述步骤(3)~步骤(7), 直至达到最大迭代次数 G , 停止更新;

(9) 选择最优的种群个体位置作为输出结果, 从而获得优化模型待求参数的估计值。

4 实验结果与分析

为验证文中提出的多目标优化算法的有效性, 实验主要选取 Samson 和 Cuprite 两个真实数据集进行解混, 对比五种解混算法: 基于 LMM 模型的 Bayes 算法、基于 LMM、GBM 和 PPNM 三种不同混合模型的梯度类优化算法, 以及基于 MLM 混合模型的 FMINCON 算法, 并在以上四种混合模型的基础上, 都采用文中提出的多目标优化算法进行求解。文中算法的参数设置为: 多目标优化模型的权重系数 $\alpha=0.5$, 种群规模 $N=30$, 最大迭代次数 $G=30$, 搜索空间边界 $up=ones(1, R), low=[zeros(1, R)-1]$ 。

4.1 Samson 数据集

Samson 数据集是由美国 Florida Environmental Research Institute 采用 Samson sensor 拍摄得到。该数据集包括 952×952 个像素点, 每个像素点有 156 个波段, 观测波长范围在 $0.401 \sim 0.889 \mu\text{m}$ 之间, 实验通常选取尺寸为 95×95 像素的子图^[14-15], 如图 2 所示。

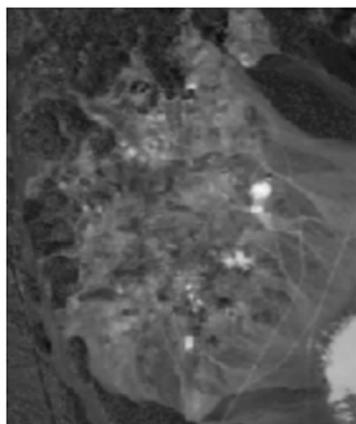


图 2 Samson 场景图
Fig.2 Samson scene

4.2 Cuprite 数据集

Cuprite 数据集是高光谱解混问题中的重要研究对象^[16-17], 拍摄于美国内华达州拉斯维加斯市 (Las Vegas, NV, U.S.)。该数据集的每个像素点包含 224 个波段, 波长范围在 0.37~2.48 μm 。与参考文献[16]一致, 文中选取其中 250×190 像素的子图进行实验, 如图 3 所示。该数据地物种类多达 14 种, 但是部分地物成分相对较少, 通常情况下提取的端元数目在 6 种左右^[14]。

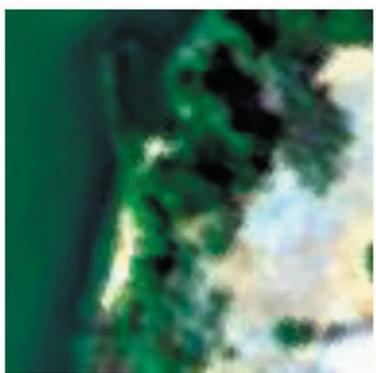


图 3 Cuprite 场景图
Fig.3 Cuprite scene

实验选取以上两个数据集采用文中算法与对比算法进行解混, 实验结果如表 1 所示, 表中前五行为对比算法的解混结果。由实验结果可知, 非线性解混算法明显优于线性解混算法, 而最近提出的高阶非线性解混算法效果最优。这说明满足复杂场景要求的高光谱混合模型能够进一步改善光谱解混精度。

表 1 解混性能比较

Tab.1 Comparison of unmixing performances

Algorithm	Samson		Cuprite	
	RE	SAM	RE	SAM
Bayes	0.044 5	0.075 5	0.089 6	0.972 4
LMM	0.031 9	0.066 2	0.015 3	0.034 9
GBM	0.030 2	0.065 8	0.015 0	0.034 0
PPNM	0.026 1	0.057 6	0.010 6	0.023 9
MLM	0.021 5	0.034 9*	0.010 1	0.021 6
LMM-MODS	0.025 3	0.051 7	0.013 1	0.024 9
GBM-MODS	0.022 9	0.052 7	0.013 6	0.026 8
PPNM-MODS	0.020 2	0.047 5	0.011 2	0.021 0
MLM-MODS	0.017 5	0.036 7	0.006 7	0.020 3

表 1 的后四行表示文中提出的多目标优化算法在不同混合模型下解混得到的实验结果, 与基于相同模型的传统算法相比, 解混效果均明显获得提升, 这说明文中提出的多目标优化算法能够进一步提高传统模型的解混精度。表 1 中的 MLM-MODS 算法的解混结果最优, 对于 Samson 数据集 SAM 指标仅下降了 5%, RE 指标提升了 19%, 解混效为总体最优。对于 Cuprite 数据集, 解混效果实现了 RE 和 SAM 指标同时达到最优结果。

基于 MLM-MODS 算法解混得到的端元丰度图分别如图 4 和图 5 所示。图 4 从左到右依次为 Water、Soil 和 Tree, 图 5 从左到右、从上到下依次为 Sphene、Alunite、Buddingtonite、Muscovite、Chalcedony 和 Montmorillonite。由端元丰度图可以看出, 文中算法能够有效进行高光谱图像解混, 实现地物的高精度识别和丰度估计。

通过调整目标函数权重, 得到的解混效果也不同, RE 和 SAM 指标与权重大小折线关系图如图 6 所示。当 RE 目标函数的权重系数时(权重系数数量级小, 是因为 SAM 目标函数值的变化幅度小), Samson 数据集解混结果的 RE 指标为 0.014 0, SAM 指标为 0.030 6; Cuprite 数据集解混结果的 RE 指标为 0.005 6, SAM 指标为 0.014 8, 解混效果进一步提升, 这说明引入 SAM 目标函数能够获得更好的解混效果。

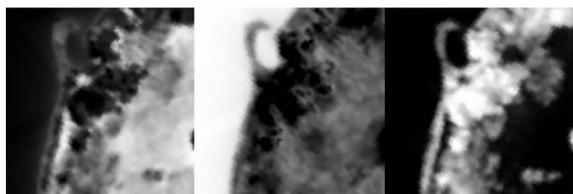


图 4 基于 MLM-MODS 算法解混得到的丰度图(Samson)

Fig.4 Abundance maps unmixed by the MLM-MODS(Samson)

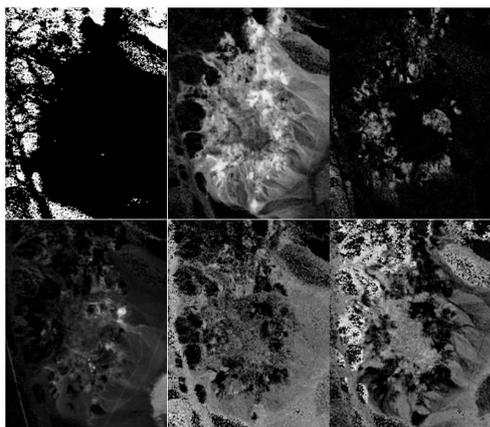


图 5 基于 MLM-MODS 算法解混得到的丰度图(Cuprite)

Fig.5 Abundance maps unmixed by the MLM-MODS (Cuprite)

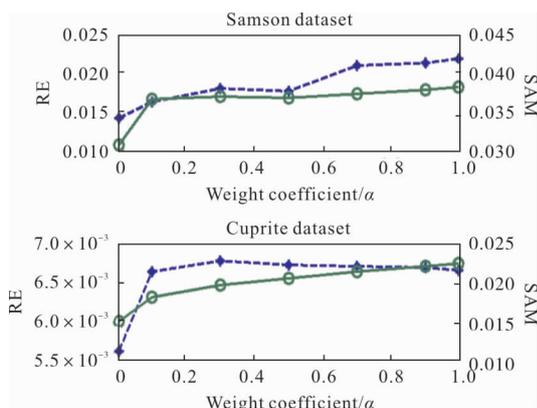


图 6 重构误差/光谱角分布随权重系数大小的变化关系

Fig.6 RE/SAM versus the weight coefficient

5 结论

传统方法采用单目标优化方法进行解混，易受高光谱图像数据异常值影响，且基于梯度类优化方法易陷入局部极值。文中提出了一种基于高阶非线性混合模型的多目标高光谱图像解混算法，该算法引入光谱角分布作为目标函数，减少优化模型对异常值的敏感性，建立以重构误差与光谱角分布为目标函数的多目标优化模型，并采用差分搜索算法进

行多目标优化模型求解。实验结果表明，文中算法有效求解基于不同混合模型的优化模型，提升解混精度，其中基于 MLM 的多目标高光谱解混算法的解混精度最高。

参考文献：

- [1] Dobigeon N, Tournet J Y, Cédric Richard, et al. Nonlinear unmixing of hyperspectral images: Models and algorithms [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2013, 31(1): 82-94.
- [2] Bioucas -Dias J M, Plaza A, Dobigeon N, et al. Hyperspectral unmixing overview: geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2012, 5(2): 354-379.
- [3] Keshava N, Mustard J F. Spectral unmixing [J]. *Signal Processing Magazine IEEE*, 2002, 19(1): 44-57.
- [4] Hape B. Bidirectional reflectance spectroscopy: I. theory [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1981, 86(B4): 3039-3045.
- [5] Borel C C, Saw G. Nonlinear spectral mixing models for vegetative and soil surfaces [J]. *Remote Sensing of Environment*, 1994, 47(3): 403-416.
- [6] Shkuratov Y, Starukhina L, Hoffmann H, et al. A model of spectral albedo of particulate surfaces: implications for optical properties of the moon [J]. *Icarus*, 1999, 137(2): 235-246.
- [7] Hapke B. Theory of Reflectance and Emittance Spectroscopy [M]. New York:Cambridge University Press, 1993.
- [8] Chen Lei, Guo Yanju, Ge Baozhen. Nonlinear unmixing of hyperspectral images based on differential search algorithm [J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2017, 45 (2): 337-345.(in Chinese)
- [9] 陈雷, 郭艳菊, 葛宝臻. 基于微分搜索的高光谱图像非线性解混算法 [J]. *电子学报*, 2017, 45(2): 337-345.
- [10] Fan W Y, Hu B X, Miller J, et al. Comparative study between a new nonlinear model and common linear model for analysing laboratory simulated -forest hyperspectral data [J]. *International Journal of Remote Sensing*, 2009, 30(11): 2951-2962.
- [11] Halimi A, Altmann Y, Dobigeon N, et al. Nonlinear unmixing of hyperspectral images using a generalized bilinear model [J]. *IEEE Transactions on Geoscience*

- & *Remote Sensing*, 2011, 49(11): 4153–4162.
- [11] Altmann Y, Halimi A, Dobigeon N, et al. Supervised nonlinear spectral unmixing using a polynomial post nonlinear model for hyperspectral imagery [C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. IEEE, 2011: 1009–1012.
- [12] Marinoni A, Gamba P. Accurate detection of anthropogenic settlements in hyperspectral images by higher order nonlinear unmixing [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2017, 9(5): 1792–1801.
- [13] Heylen R, Scheunders P. A Multilinear mixing model for nonlinear spectral unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2016, 54(1): 240–251.
- [14] Zhu F, Halimi A, Honeine P, et al. Correntropy maximization via ADMM: application to robust hyperspectral unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2017, 55(9): 4944–4955.
- [15] Zelinski A C, Goyal V K. Denoising hyperspectral imagery and recovering junk bands using wavelets and sparse approximation [C]// IEEE International Conference on Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2006:387–390.
- [16] Zhu F Y, Wang Y, Fan B, et al. Spectral unmixing via data-guided sparsity [J]. *IEEE Trans Image Process*, 2014, 23(12): 5412–5427.
- [17] Lu X, Wu H, Yuan Y, et al. Manifold regularized sparse NMF for hyperspectral unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2013, 51(5): 2815–2826.
- [18] Chen Lei, Gan Shizhong, Sun Qian. Nonlinear unmixing using backtracking optimization for hyperspectral imagery [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2017, 46(6): 0638001. (in Chinese)
陈雷, 甘士忠, 孙茜. 基于回溯优化的非线性高光谱图像解混 [J]. 红外与激光工程, 2017, 46(6): 0638001.
- [19] Civicioglu P. Transforming geocentric cartesian coordinates to geodetic coordinates by using differential search algorithm [J]. *Computers & Geosciences*, 2012, 46(3): 229–247.
- [20] Wang Y, Cai Z, Zhang Q. Differential evolution with composite trial vector generation strategies and control parameters [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2011, 15(1): 55 – 66.
- [21] Karaboga D and Basturk B. On the performance of artificial bee colony (ABC) algorithm [J]. *Applied Soft Computing*, 2008, 8(1): 687 – 697.
- [22] Díaz A, Rios A, Barron J, et al. An automatic document classifier system based on genetic algorithm and taxonomy [J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 21552–21559.
- [23] Nascimento J M and Dias J M. Vertex component analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2005, 43(4): 898–910.