# 基于非均匀采样的高分辨曲面投影计算全息方法

蔡文涛,李 晶,江海波,孙秀辉,杨若夫,尹韶云

(中国科学院重庆绿色智能技术研究院, 重庆 400714)

**摘 要**:曲面投影在显示与光刻领域有着重要的应用价值,为实现高分辨的曲面投影成像,提出了以瑞利-索末菲衍射为基础的非均匀采样相位恢复算法, 在设计时准确考虑高空间频率的大角度衍射频谱信息,使得投影图像分辨率获得有效提升;建立了衍射面与成像曲面的离散采样方法,并给出了成像分辨率极限的理论表达式。以“田”字形目标图样在圆柱面成像为例,对建立的相位恢复算法和理论进行了验证,结果表明重现的投影像与目标图形符合良好,分辨率与理论预测一致。

**关键词**:非均匀采样; 曲面投影; 计算全息; 高分辨

**中图分类号**:TN205 **文献标志码**:A **DOI**:10.3788/IRLA201948.0524004

# Computer-generated hologram for high resolution projection on curved surface based on non-uniform sample

Cai Wentao, Li Jing, Jiang Haibo, Sun Xiuhui, Yang Ruofu, Yin Shaoyun

(Chongqing Institute of Green and Intelligent Technology, Chinese Academy of Sciences, Chongqing 400714, China)

**Abstract:** Projection on curved surface has important applications in display and photolithography. A phase retrieval algorithm, using non-uniform sample, was presented for high resolution projection on curved surface based on the Rayleigh-Sommerfeld Integral. The high spatial frequency means large diffraction angle was incorporated into the design, so that the imaging resolution of projection could be improved effectively. The discrete sampling method was established for the diffraction surface and the imaging surface. Then the theoretical equation of limit resolution was given. Finally diffraction optical elements were designed for projection on cylindrical surface with the diffraction pattern of grid, in order to verify the phase retrieval theory. The results show that reconstructed projecting image matches well with the target image, and the resolution is in agreement with theoretical prediction.

**Key words:** non-uniform sample; projection on curved surface; computer-generated hologram; high resolution

**收稿日期**:2018-12-10; **修订日期**:2019-01-01

**基金项目**:国家自然科学基金(61475199, 61605208);国家重点研发计划(2017YFB1002900)

**作者简介**:蔡文涛(1990-),男,研究实习员,硕士,主要从事 LED 应用集成与衍射光学元件设计方面的研究。Email: cai_wentao@yeah.net

**通讯作者**:尹韶云(1981-),男,研究员,博士,主要从事微光学与自由曲面光学设计方面的研究。Email: ysy@cigit.ac.cn

## 0 引 言

曲面上投影显示在医疗诊断[1]、增强现实[2]以及场馆展览等领域[3-4]有着重要的应用价值。相对传统投影镜头光学系统，计算全息投影技术利用对光波的相位调制，只需简单的光路即可实现曲面共形投影，使用灵活且对曲面屏幕要求不高，有着明显的技术优势。

计算全息实现曲面投影的关键技术之一是衍射光学元件(Diffraction Optical Elements, DOE)的相位求解算法，根据要显示的图形逆向获得相位调制。现有的相位求解方法包括遗传算法[5-6]、模拟退火算法[7]、汉克尔变换法[8]、直接二元搜索法[9]、盖师贝格-撒克斯通(Gerchberg-Saxton, GS)算法[10-11]等，这些算法大多是针对平面投影。为实现曲面上的全息投影，Zhao 等[12]提出了一种基于惠更斯衍射积分公式曲面正、逆向衍射相位求解运算，然而其衍射元件面和成像曲面均采用等间距采样，衍射元件产生的频谱和成像曲面的频谱难以完美匹配，容易导致投影成像产生畸变或模糊。Tian 等[13-14]做了相关改进，将成像曲面进行分块，采取多个目标曲面联合优化的方法来设计，但由于等间距采样，对曲面面型仍然存在很大限制。为解决成像面频谱非均匀采样问题，研究人员[15-16]采用了基于非均匀快速傅里叶变换的相位求解方法，实现了三维全息投影。然而该方法是基于傍轴近似，要求衍射角不能太大，对于体积紧凑的投影成像(如传统的超短焦投影)，该方法获得的图像分辨率受到限制。

文中针对高分辨曲面投影成像，提出了一种基于非均匀网格划分的 GS 相位求解算法，使得 DOE 产生的空间频谱与曲面投影图像的空间频谱相互对应，解决了曲面全息投影相位求解的收敛问题。其正逆向衍射运算采用了瑞利-索末菲衍射积分公式，使得设计出来的衍射元件适用于大视场全息投影，确保高分辨率成像。最后以圆柱像面的实例对该方法进行了仿真验证。

## 1 设计原理

### 1.1 非均匀网格划分

全息曲面成像系统的物理模型如图 1 所示，单色平面光照射到 DOE 上，经过一定距离传播后在成像曲面上产生衍射图样。

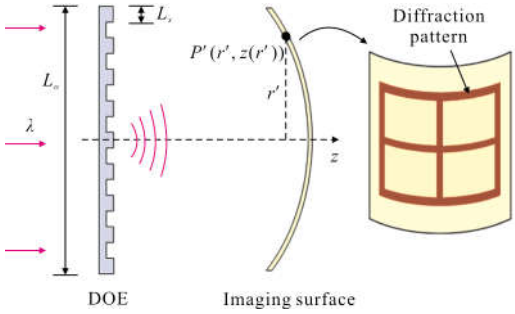



图 1 衍射光学元件曲面成像原理图

Fig.1 Schematic diagram of imaging on curved surface by DOE

为了实现高分辨曲面全息投影，需要大角度空间频谱参与，此时傍轴近似不再成立。而第一类瑞利-索末菲衍射积分公式是标量衍射理论框架内最为准确的衍射计算公式，不包含任何物理近似。假设 DOE 面的入射光复振幅分布为 $u(x, y)$，其成像面的光场分布为：

$$u'(x', y')=\iint u(x, y)\frac{z\exp(ikr)(1-ikr)}{2\pi r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

式中：$k=2\pi/\lambda$，$\lambda$ 为 DOE 设计波长；$z$ 为光轴衍射距离。DOE 面和成像面上任意两点间的距离：

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2} \tag{2}$$

计算全息需将衍射公式离散化，如图 2 所示，假设 DOE 面上 $x$ 方向有 $M$ 个采样点，$y$ 方向有 $N$ 个采样点，且采样间距都为 $L_s$，则离散的积分公式如下：

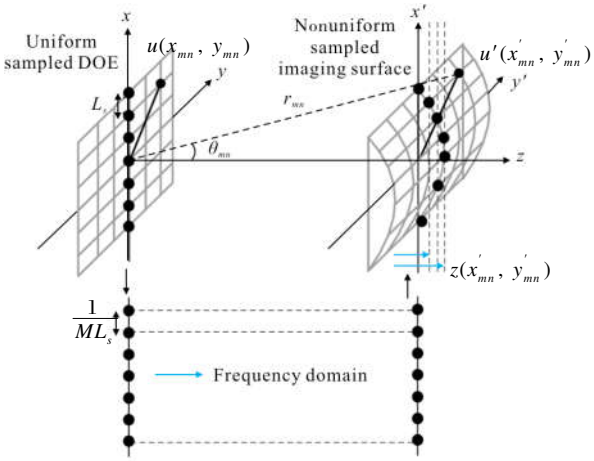



图 2 衍射光学元件衍射系统采样方法示意图

Fig.2 Schematic diagram of sampling method of DOE system

$$u'(x'_{mn}, y'_{mn})=\sum\sum u(x_{mn}, y_{mn})\times h(x'_{mn}, y'_{mn}, x_{mn}, y_{mn})\times L_s^2$$

$$(m=1,2,\cdots,M;\ n=1,2,\cdots,N) \tag{3}$$

根据公式(3)解像面衍射图样,则必须知道对应的离散空域坐标($x'_{mn}$, $y'_{mn}$),该坐标不一定为等间距采样[17]。由公式(1)可知,光自由传播的系统可认为是一个空间不变线性系统,其模型可转化到频域上讨论。根据采样定理[18]可知,输入面在 $x$ 轴(或 $y$ 轴)方向上可恢复的截止频率为 $f_{止}=1/(2L_s)$,$u(x,y)$经傅里叶变换后的 $U(f_p, f_q)$在 $x$ 轴对应的离散频域坐标为 $f_p=p/(ML_s)$,其中 $p=m-M/2$,$q=n-N/2$。由于衍射的正向和逆向是互逆过程[19],假设从像面逆向衍射,像面 $x'$轴采样位置点到衍射元件处衍射后其频域坐标为 $f_{xmn}=\sin\theta x_{mn}/\lambda=x'_{mn}/(\lambda r_{mn})$,$r_{mn}$为像面采样位置点到衍射元件中心的距离。频域上坐标需相互对应确保频谱不丢失,则像面的空域坐标为:

$$x'_{mn}=\frac{p\lambda}{ML_s}r_{mn}=\frac{p\lambda r_{ymn}}{\sqrt{(ML_s)^2-(p\lambda)^2}}$$

$$y'_{mn}=\frac{q\lambda}{NL_s}r_{mn}=\frac{q\lambda r_{xmn}}{\sqrt{(NL_s)^2-(q\lambda)^2}} \tag{4}$$

式中:$r_{xmn}$和 $r_{ymn}$分别为 $r_{ymn}$在 $x$ 轴和 $y$ 轴的分量。可见像面上对应采样点是不均匀的,确保了公式离散化后坐标本身的对应,否则采用 GS 算法难以获得收敛相位。在采样点确认之后,即可采用离散的瑞利-索末菲衍射积分公式进行 GS 算法,以获取 DOE 相位分布。

### 1.2 成像分辨率分析

尽管 DOE 面到达成像曲面各个位置的最大频率略有不同,但其极限频率不会超过 $f_{止}=1/(2L_s)$,在考虑成像分辨率时可简化为只考虑最大频率。基于标量衍射理论,采样间隔 $L_x$ 需大于工作波长,系统可分辨的最小空间周期或最小分辨距离为截止空间频率的倒数,则能成像的最细线条为周期的一半,即 $\Delta r_{极}=L_s$,此时对应的工作距离为可设计的最近工作距离。实际中,基于像面尺寸或面型等原因工作距离 $z$ 通常会大于最近工作距离,此时向前传播的最大频率为 $f_{\max}\approx ML_s/(2\lambda z)$,该分辨率必然小于极限分辨率 $\Delta r_{极}$。同样,可根据离散采样的特性求解离散数据点 $x'_{mn}$的间隔来确定,则由公式(4)也可以得到:

$$L'_s=x'_m-x'_{m-1}\geqslant\frac{z\lambda}{ML_s}\geqslant L_s\left(z\geqslant\frac{ML_s^2}{\lambda}\right) \tag{5}$$

在确定曲面形状的情况下,投影分辨率与实际分辨率的几何关系如图 3 所示。已知成像在 $x'y'$平面上的投影分辨率 $L'_s$,即可根据欧拉近似有:

$$L_p=L'_s\sqrt{1+z'(r')^2} \tag{6}$$

得到在曲面上的实际分辨率 $L_p$。

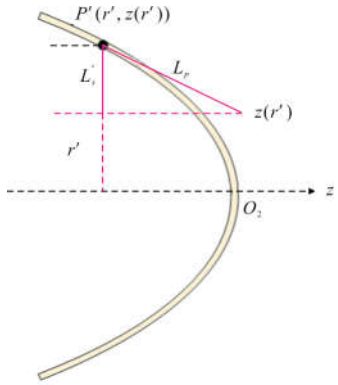



图 3 投影分辨率与实际分辨率的几何关系

Fig.3 Geometric relationship between projection resolution and actual resolution

根据公式(5)、(6)可知,影响成像分辨率的主要因素是 DOE 的采样间隔(特征尺寸)、工作距离和曲面面型。成像极限分辨率限定了 DOE 的最大采样间隔,而成像的大小限定了 DOE 的大小,进而限定了 DOE 面到成像面最近的轴向距离 $z_0$。因此在设计 DOE 时,成像分辨率和尺寸只需满足对应条件,如采样间隔和 $z_0$(该距离可以不满足菲涅耳衍射条件),即可实现高分辨成像。

### 1.3 设计算法

根据以上分析可知,该设计是基于 GS 算法的正、逆向衍射迭代。采用公式(3)可逐点计算成像面的光场复振幅,但是并不能直接用于逆衍射计算,需要将公式(3)进行矩阵化处理,得到正向衍射的计算公式为:

$$I_{1,\ N\times N}=O_{1,\ N\times N}\times H_{N\times N,\ N\times N}\times L_s^2 \tag{7}$$

式中:$O_{1,\ N\times N}$和 $I_{1,\ N\times N}$为 1 行 $N\times N$ 列矩阵,分别包含

DOE 面和输出面所有采样点的光场信息；$H_{N\times N,N\times N}$ 为 $N\times N$ 方阵，包含了脉冲响应函数 $h$ 在离散化后的所有取值。因为 $H_{N\times N,N\times N}$ 为可逆矩阵，则由公式(7)可以得到逆向衍射的计算公式为：

$$O_{1,N\times N}=I_{1,N\times N}\times H^{-1}_{N\times N,N\times N}\times L_s^{-2} \tag{8}$$

在实际设计中，DOE 的加工方法有限，采样间隔 $L_s$ 首先被限定。在确认特定曲面上特定的投影像之后，根据公式(5)可适当调整工作距 $z$ 和采样点数 $M$ 以满足高分辨投影要求。在 DOE 面和输出面的采样点坐标都确定之后，即可根据 GS 算法求解 DOE 面的相位分布，直到重构的光强分布和目标光强分布的误差[14]足够小为止，即满足相关系数 $|\delta|\geqslant 0.9$，此时相位分布 $\varphi_0$ 即为设计 DOE 的相位分布。

## 2 仿真实验

以圆柱成像面为例，验证文中高分辨曲面投影计算全息方法的可行性。目标光强在 $x'y'$ 平面的投影图样为“田”字形(如图 1 所示)，假定设计波长为 405 nm，成像柱面的半径 $R$ 为 3 mm，圆柱面各采样点距 DOE 面轴向距离的区间为[5.2 mm, 6.0 mm]。DOE 采样间隔 $L_s$ 在激光直写能做到的最小尺寸为 0.4 μm，采样点数量为 256 pixel×256 pixel。该成像曲面的数学表达式为：

$$z(x',y')=\sqrt{R^2-x'^2}+z_0 \tag{9}$$

式中：$z_0$ 为成像柱面在 $xz$ 面的圆心到 DOE 面的距离。将公式(9)代入公式(6)，可得到成像面上的极限分辨率为：

$$L_p(x',y')=\frac{\lambda R z(x',y')}{ML_s\sqrt{R^2-x'^2}} \tag{10}$$

由于该衍射系统是中心对称的，可从 $x'$ 轴和 $y'$ 轴正半轴的极限分辨率变化入手，研究系统分辨率变化规律。根据公式(10)可知，成像面沿 $y'$ 轴的极限分辨率是不变的，可得像面极限分辨率随工作距离 $z$ 的变化规律如图 4 所示。则在工作距离为 6 mm 处获得最大极限分辨率为 23.7 μm，在工作距离为 5.2 mm 处获得最小极限分辨率为 28 μm，整体相差不大。

该全息投影成像根据 1.3 节的设计流程，可获得光强分布如图 5(a)所示，其“田”字形图案得到清晰

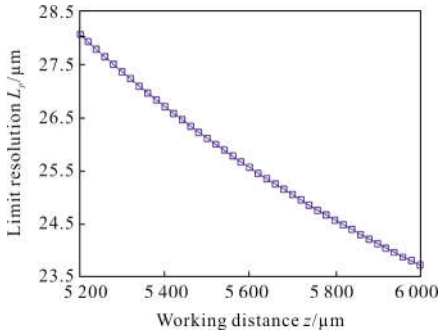
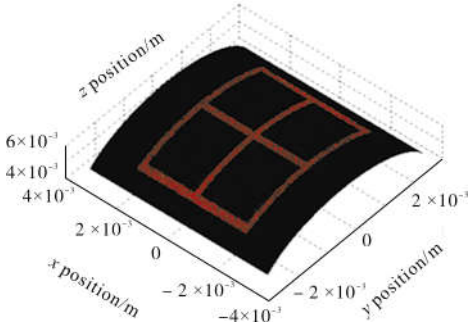


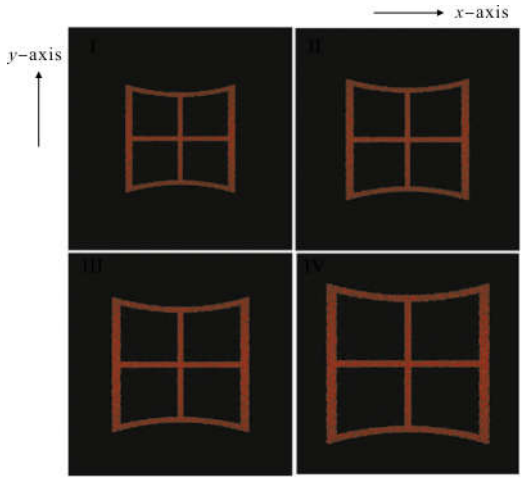

图 4 曲面成像分辨率变化规律

Fig.4 Variation rule of imaging resolution on curved surface




(a) 曲面上衍射图样

(a) Diffraction pattern on curved surface




(b) 垂直于光轴 4 个截面的衍射图样

(b) Diffraction patterns on 4 sections perpendicular to the optical axis

图 5 成像仿真结果

Fig.5 Simulation results of projection

复现。为了进一步判断该 DOE 设计的可行性，在成像面空间取垂直于光轴的 4 个截面来观察光强分布情况。这 4 个平面分别位于 $z$ 轴上的 4.0、4.5、5.0、6.0 mm 处，分别称之为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ截面。仍采用公式(4)计算截面的对应坐标，再通过公式(3)计算 4 个

截面上的光强分布情况,其仿真结果如图 5(b)所示。

各个截面的衍射图样相比于目标图样均出现了畸变和轻微模糊化,且畸变在 $x'$轴方向,这与成像面在 $x'$轴方向是弯曲的正好相符。随着传播距离增加,衍射图样不断变大,与衍射传播规律吻合。因此这种改进的 GS 算法可用于大视场曲面成像的 DOE 设计。

为验证曲面成像分辨率设计的可行性,同样根据 1.3 节的设计流程,将“田”字图样更换为在 $x'y'$ 平面的投影为 4 组条纹的分辨率线条组,每组分为 7 小组线宽分别为 20、25、30、35、40、45、50 μm 的若干线条。每种类型包含 3 条,3 条间的线宽和线距相等。在获取 DOE 相位分布后,通过公式(3)计算仿真,得到实际衍射图样在 $x'y'$面上的投影如图 6 所示。

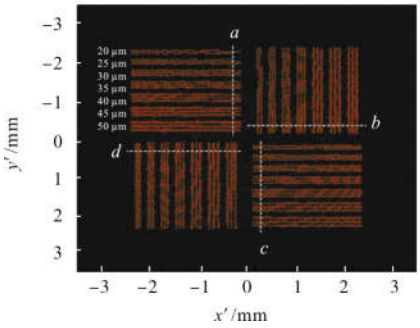



图 6 实际衍射条纹在 $x'y'$ 平面上的投影

Fig.6 Projection of the diffraction pattern onto the plane $x'y'$

由图 6 可知,$a$、$b$、$c$、$d$ 4 组线中基本能分辨的最小线条为 25 μm,但该线条依然有些模糊,而 30 μm 的线条已经完全能够分辨,与理论的极限分辨率十分吻合,进而证明了文中提出的 DOE 设计方法可以在曲面全息投影方面达到分辨率极限。因此通过合理地设置衍射光学元件设计参数,如适当地缩小工作距离和加大采样点数,可以在曲面上达到极高成像分辨率。

## 3 结 论

针对在曲面上实现全息高分辨投影成像,文中以瑞利-索末菲衍射理论为基础消除傍轴近似,引入大角度空间频谱来提高成像分辨率。提出了一种曲面目标图样的采样方法,用于建立 DOE 面与成像曲面坐标点的对应关系,保证了 GS 算法能够顺利收敛。同时分析了曲面投影成像的极限分辨率,用于指导 DOE 设计时的参数选取。在设计实例中设定成像曲面为圆柱面,目标图样为“田”字形,获得与目标图形符合良好的投影成像,证明了该改进方法的可行性。并通过设置不同方向、不同线宽的分辨率条纹组,对该曲面成像的分辨能力进行仿真分析,获得 25~30 μm 的分辨率,与理论的极限分辨率 23.7~28 μm 预测一致,证明了该方法和理论的正确性。

**参考文献:**

[1] LuKas Scheef, Klaus Hoenig, Horst Urbach, et al. Curved-surface projection: an alternative method for visualizing functional MR imaging results[J]. ***American Society of Neuroradiology***, 2003, 24: 1045-1048.

[2] Oliver Bimber, Ramesh Raskar. Modern Approaches to Augmented Reality [M]. Boston: ACM Press, 2006: 1-86.

[3] Yan Gaobin, Yu Jia, Liu Huiping, et al. Full parallax stereo holography research based on CGH [J]. ***Infrared and Laser Engineering***, 2015, 44(8): 2467-2471. (in Chinese)
闫高宾, 于佳, 刘惠萍, 等. 基于计算全息的全视差合成全息研究[J]. 红外与激光工程, 2015, 44(8): 2467-2471.

[4] Chen Zhu, Jiang Hongzhen, Liu Xu, et al. Measurement of surface defects of optical elements using digital holography[J]. ***Optics and Precision Engineering***, 2017, 25(3): 576-583. (in Chinese)
陈竹, 姜宏振, 刘旭, 等. 数字全息术用于光学元件表面缺陷形貌测量[J]. 光学 精密工程, 2017, 25(3): 576-583.

[5] Jiang W, Wang J, Dong X. A novel hybrid algorithm for the design of the phase diffractive optical elements for beam shaping [J]. ***Optics & Laser Technology***, 2013, 45(1): 37-41.

[6] Pang Hui, Ying Chaofu, Fan Changjiang, et al. Design diffractive optical elements for beam shaping with hybrid algorithm [J]. ***Acta Photonica Sinica***, 2010, 39(6): 977-981. (in Chinese)
庞辉, 应朝福, 范长江, 等. 用于光束整形的衍射光学元件设计的混合算法 [J]. 光子学报, 2010, 39(6): 977-981.

[7] Kang Guoguo, Xie Jinghui, Mo Xiaoli, et al. Design of binary optics using improved two-step simulated

annealing algorithm [J]. ***Acta Photonica Sinica***, 2008, 37(7): 1416–1419. (in Chinese)
康果果, 谢敬辉, 莫晓丽. 用改进的两步模拟退火法进行二元光学元件的设计 [J]. 光子学报, 2008, 37(7): 1416–1419.

[8] Liu Hua. Gaussian beam shaping diffractive optical element designed by Hankel transformation [J]. ***Chinese Optics***, 2016, 9(2): 277–283. (in Chinese)
刘华. 利用汉克尔变换设计高斯光束整形衍射元件的应用研究[J]. 中国光学, 2016, 9(2): 277–283.

[9] Kim G, Dominguez–caballero J A, Menon R. Design and analysis of multi–wavelength diffractive optics[J]. ***Optics Express***, 2012, 20(3): 2814–2823.

[10] Qu W, Gu H, Tan Q, et al. Precise design of two–dimensional diffractive optical elements for beam shaping[J]. ***Applied Optics***, 2015, 54(21): 6521–6525.

[11] Pang H, Yin S, Deng Q, et al. A novel method for the design of diffractive optical elements based on the Rayleigh–Sommerfeld integral [J]. ***Optics & Lasers in Engineering***, 2015, 70(1): 38–44.

[12] Zhao Haozhi, Liu Juan, Xiao Ru. Modulation of optical intensity on curved surfaces and its application to fabricate DOEs with arbitrary profile by interference[J]. ***Optics Express***, 2013, 21(4): 5141–5148.

[13] Tian Ran, Liu Juan, Li Xin. Design and fabrication of complicated diffractive optical elements on multiple curved surfaces [J]. ***Optics Express***, 2015, 23 (26): 32917–32925.

[14] Liu Peilin, Liu Juan, Li Xin. Design and fabrication of DOEs on multifreeform surfaces via complex amplitude [J]. ***Optics Express***, 2017, 25(24): 30061–30072.

[15] Chang Chenliang, Xia Jun, Wu Jun, et al. Scaled diffraction calculation between tilted planes using nonuniform fast Fourier transform [J]. ***Optics Express***, 2014, 22(14): 17331–17340.

[16] Chang Chenliang, Wu Jun, Qi Yijun, et al. Simple calculation of a computer–generated hologram for lensless holographic 3D projection using a nonuniform sampled wavefront recording plane [J]. ***Applied Optics***, 2016, 55(28): 7988–7996.

[17] Li Jing, Wu Peng, Yang Zheng, et al. Design method for the near–field diffractive optical elements with large diffraction angle based on the rayleigh–sommerfeld fiffraction theory [J]. ***Acta Photonica Sinica***, 2017, 46(11): 182–188. (in Chinese)
李晶, 吴鹏, 杨正, 等. 基于瑞利–索末菲衍射理论的近场大衍射角衍射光学元件的设计 [J]. 光子学报, 2017, 46 (11): 182–188.

[18] Li Yan, Li Sheng, Gao Minguang, et al. Fourier interpolative sampling algorithm in Fourier transform infrared spectrometer [J]. ***Infrared and Laser Engineering***, 2018, 47(1): 0123001. (in Chinese)
李妍, 李胜, 高闽光, 等. FTIR 光谱仪中傅里叶插值采样方法的研究[J]. 红外与激光工程, 2018, 47(1): 0123001.

[19] Zhang Xiaolei, Zhang Xiangchao, Xiao Hong, et al. Speckle removal in phase reconstruction of digital holography for structured surfaces [J]. ***Infrared and Laser Engineering***, 2016, 45(7): 0726002.