

基于梯度场的紧致差分最小二乘面形重建算法

巫玲¹, 武从海², 陈念年¹, 范勇¹

- (1. 西南科技大学 计算机科学与技术学院, 四川 绵阳 621010;
2. 中国空气动力研究与发展中心 空气动力学国家重点实验室, 四川 绵阳 621000)

摘要: 为快速准确根据测得的梯度场重建表面面形, 针对基于最小二乘全局积分的重建技术, 采用紧致差分算子建立全局最优化的代价函数以提高重建精度, 将代价函数表示为 Sylvester 方程, 利用 Hessenberg-Schur 算法求解, 将常用最小二乘全局积分技术的空间和时间复杂度分别从 $O(N^2)$ 和 $O(N^3)$ 降低到 $O(N)$ 和 $O(N^{3/2})$ 。实验结果表明: 采用四阶精度的紧致差分算子时, 文中算法重建精度比高阶截断误差最小二乘积分法(HFLI)和全局最小二乘法(GLS)提高了一个数量级, 采用六阶精度的紧致差分算子时重建精度比基于样条的最小二乘积分法(SLI)提高了一个数量级; 鲁棒性优于 GLS, 弱于 HFLI 和 SLI; 重建速度显著优于 HFLI 和 SLI, 略优于 GLS。

关键词: 三维面形重建; 梯度场; 最小二乘全局积分; 紧致差分; Sylvester 方程

中图分类号: TN247 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201948.0825002

Least square surface reconstruction method with compact finite difference scheme from measured gradient field

Wu Ling¹, Wu Conghai², Chen Niannian¹, Fan Yong¹

- (1. School of Computer Science and Technology, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China;
2. State Key Laboratory of Aerodynamics, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China)

Abstract: In order to reconstruct the 3D surface from gradient fields quickly and accurately, a new fast and accurate least squares integration algorithm was proposed. Compact finite difference scheme was introduced into optimization equation for better accuracy. Then the objective function was represented as a Sylvester function. With Hessenberg-Schur algorithm, the space and time complexity were reduced from $O(N^2)$ and $O(N^3)$ to $O(N)$ and $O(N^{3/2})$, respectively. The experiment result showed that when the 4th-order compact scheme is used, the accuracy of the new method is improved by one order higher than Higher-order Finite-difference-based Least-squares Integration (HFLI) and Global Least-Squares (GLS). While with 6th-order compact scheme, the accuracy is improved by one order higher than Spline-based Least-squares Integration (SLI). The robustness of the proposed method is weaker than that of HFLI and SLI, but better than GLS. The reconstruction speed was obviously faster than that of HFLI and SLI.

Key words: 3D surface reconstruction; gradient field; least squares integration; compact finite difference scheme; Sylvester function

收稿日期: 2019-03-10; 修订日期: 2019-04-15

基金项目: 四川省教育厅科技成果转化重大培育项目(14zd1102); 西南科技大学龙山学术人才科研支持计划(17LZX425)

作者简介: 巫玲(1982-), 女, 讲师, 硕士, 主要从事光学测量、视觉检测方面的研究。Email: wuling751@126.com

0 引言

三维面形重建是利用测得的表面梯度(斜率)或法向向量数据重建物体表面形貌的过程,是光学测量、机器视觉中的一个经典问题,是哈特曼波前检测、干涉测量、光栅投影测量等技术的关键步骤之一^[1-4]。

设有 3D 表面 $Z(x, y)$, 其梯度场表示为 $\nabla Z=(Z_x, Z_y)=(\partial Z/\partial x, \partial Z/\partial y)=(p, q)$, 具体到离散状态, 可用有限差分的形式来表示, 因此基于梯度场的表面重建方法常采用积分运算。但直接积分很容易受到噪声和表面不连续性的干扰, 目前多采用更鲁棒的全局积分技术, 通过最小化一定的代价函数来对重建结果进行约束以减小整体重建误差。通常以所测梯度场与真实斜率间整体差异作为代价方程, 来增加斜率的可积性(可积性约束)。因此, 代价函数的选择是重建的关键步骤之一。

根据最优化代价函数所使用的方法, 可将现有的全局积分算法分为两类: 最小二乘积分法(Least Squares Integration, LSI) 和基于变换的积分法(Transform-Based Integration, TBI)。TBI 最常见的是基于快速傅里叶变换(以及在此基础上提出的离散余弦变换), 因此运算速度更快; LSI 虽然时间复杂度和空间复杂度都更高, 却具有更广的应用范围(如非矩形区域积分)和更高重建的精度^[5-6]。

在最小二乘积分技术中, 经典的 SouthWell 模型^[7]的重建精度受其假定两个采样点之间的高度分布只有二次项所限。2013 年, Li 等^[8]通过半点处的泰勒展开推导出具有更高阶截断误差的斜率的有限差分模型。2017 年, Huang 采用三次样条^[9]拟合有限差分模型来减小重建误差。另一方面, 经典的最小二乘积分法采用奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)求解, 时间复杂度为 $O(N^3)$; Vogel 等^[10]提出用多重网格(Multigrid, MG)积分法通过由粗到细迭代求解, 实现求解过程的快速收敛, 将计算复杂度降低到 $O(N)$, 但实际计算代价受迭代时的迭代初始条件等参数影响; Harker 等^[11]将优化问题表达为一个半定的 Sylvester 方程, 显著降低了求解的空间复杂度和时间复杂度。

文中在最小二乘积分重建技术的基础上引入了紧致差分方法来提高重建精度, 并且借鉴了 Harker

的思想, 利用 Sylvester 方程使用 Hessenberg-Schur 算法来求解紧致差分方程, 最后通过数值实验与已有算法进行了对比分析。

1 最小二乘表面重建技术

1.1 最小二乘表面重建步骤

基于最小二乘法的表面重建技术包括如下两步:

(1) 通过最小化代价函数建立线性方程组

利用有限差分的思想将代价函数写为:

$$E(Z)=\left\| \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} \text{vec}(Z)-\begin{pmatrix} \text{vec}(p) \\ \text{vec}(q) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \quad (1)$$

式中: Z 为待重建面形矩阵; p 和 q 表示测量得到的梯度矩阵; $\|\cdot\|_2^2$ 表示 L^2 范数; $\text{vec}(A)$ 表示 2 维矩阵 A 转换成的列向量; D_x 和 D_y 分别是 x 和 y 方向的有限差分矩阵则有:

$$Z_x=Z \times D_x^T, Z_y=D_y \times Z \quad (2)$$

式中: D^T 表示矩阵转置。此时, 将公式(1)最小化得到线性方程组:

$$G=D \times Z, G=\begin{pmatrix} \text{vec}(p) \\ \text{vec}(q) \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} \quad (3)$$

(2) 求得线性方程组的最小二乘解

公式(3)的最小二乘解为:

$$Z=(D^T D)^{-1} D^T G \quad (4)$$

利用 SVD 法, D 可以分解为 $D=USV^T$, 因此重建面形为:

$$Z=VS^{-1}U^T G \quad (5)$$

1.2 最小二乘表面重建法的精度和复杂度分析

最小二乘法中目前广泛使用的 SouthWell 模型^[7]利用半点处中心差分实现了三阶精度的重建; Harker 等^[11]采用的是四阶精度的五点中心差分格式; Li 等^[8]改进了 SouthWell 模型, 在半点处进行泰勒展开, 推导出具有五阶、七阶精度的模型, 但其边界处仍采用三阶精度的 SouthWell 模型。

在空间复杂度上, 若待建面形有 $m \times n$ 个采样点, 则公式(3)中系数矩阵 D 的大小为 $2mn \times mn$, 虽然 D 是一个稀疏矩阵, 其空间复杂度也远超线性。而 Harker 使用的 Sylvester 方程将系数矩阵大小降低为 $m \times n$ 。

在时间复杂度上, 对于一个 $m \times n$ 的矩阵, SVD

法需要的运算次数为:

$$W_{SVD}(m, n) = 4m^2n + 8mn^2 + 9n^3 \quad (6)$$

Harker 求解 Sylvester 方程使用的 Hessenberg-Schur(HS)算法需要的运算次数为^[11]:

$$W_{HS}(m, n) = (5/3)m^3 + 5m^2n + (5/2)mn^2 + 10n^3 \quad (7)$$

虽然看起来两者的时间复杂度是相当的,但由于公式(3)待计算逆矩阵的 D 的大小为 $2mn \times mn$,因此 SVD 求解公式(3)的时间复杂度为 $41m^3n^3$,记 $N=m \times n$,则其时间复杂度为 $O(N^3)$ 。而 HS 法系数矩阵大小为 $m \times n$,不妨设 $m=n$,因此其时间复杂度仅为 $O(N^{3/2})$ 。

Vogel 等^[10]提出使用 MG 法加快收敛速度。MG 法的时间复杂度为:

$$W_{MG}(m, n) \approx 4/3(v_{pre} + v_{post} + 1)n, n_D \quad (8)$$

式中: v_{pre} 和 v_{post} 分别代表预光滑和后光滑需要迭代的次数; n_D 代表 D 矩阵中非零元个数,通常正比于 $m \times n$; n_v 是进行 V_cycles 的次数,通常取 1 或 2 即可达到收敛精度要求。

另一方面,由于 D 是稀疏矩阵,实际应用中最为广泛的求解公式(3)的方法是使用 QR 分解(QR decomposition)计算 D 的伪逆矩阵,其时间复杂度为:

$$W_{QR}(m, n) = 2mn^2 \quad (9)$$

因此 QR 分解求解公式(3)的时间复杂度为 $4m^3n^3$,即 QR 分解求解公式(3)的时间复杂度仍为 $O(N^3)$ 。理论上 MG 法的时间复杂度为 $O(N)$,但在实际程序实现中,QR 算法耗时只需 MG 算法约 1/4,因此 MG 方法在最小二乘积分技术中并未被广泛采用。

综上所述,目前常用的最小二乘表面重建技术的空间和时间复杂度分别为 $O(N^2)$ 和 $O(N^3)$,而文中使用的 HS 算法空间复杂度为 $O(N)$,时间复杂度约为 $O(N^{3/2})$ 。

2 紧致差分表面重建法

2.1 紧致差分法建立有限差分矩阵

早在 1992 年,Lele 就提出了中心型线性七点六阶差分格式^[12]:

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (10)$$

式中: α, β, a, b, c 和 d 是常数,可以通过不同阶数的泰勒展开式确定。

这样构造的格式最高精度为十阶,为了和 Li 等提出的 HFLI 对比(其典型精度为五阶),文中采用四阶精度。但上述中心型格式并不适用于非周期边界点,此时需将公式(10)改为单边型格式,如对于边界点 $i=1$,可以达到四阶精度的紧致差分格式为:

$$f'_1 + \alpha f'_2 = \frac{1}{h}(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) \quad (11)$$

式中: α, a, b, c 和 d 是常数,同样是通过不同阶数的泰勒展开式确定。

若采用四阶精度的紧致差分形式,对于边界点,差分方程为:

$$f'_i + 3f'_{i+k} = \frac{k}{h} \left(-\frac{17}{6}f_i + \frac{3}{2}f_{i+k} + \frac{3}{2}f_{i+2k} - \frac{1}{6}f_{i+3k} \right) \quad (12)$$

式中: $k=\pm 1$; 对于中间点,差分方程为:

$$\frac{1}{4}f'_{i-1} + f'_i + \frac{1}{4}f'_{i+1} = \frac{3}{4h}(f_{i+1} - f_{i-1}) \quad (13)$$

2.2 建立 Sylvester 方程求解代价函数

将代价函数公式(1)改写为:

$$E(Z) = \|p \times D_p^T - Z \times D_x^T\|_2^2 + \|D_y \times q - D_y \times Z\|_2^2 \quad (14)$$

为得到公式(14)最小值,只需令其对矩阵 Z 的偏导数等于 0,设 $P = \hat{p} \times D_x, Q = D_y^T \times \hat{q}$,有:

$$ZD_x^T D_x - D_y^T D_y Z - P - Q = 0 \quad (15)$$

公式(15)是一个 Sylvester 方程,但由于 $-D_x^T D_x$ 和 $D_y^T D_y$ 有公共特征值,因此该方程没有唯一解,可采用 HS 算法求解^[11]。首先使用 Householder 变换把矩阵 D_x, D_y, \hat{p} 和 \hat{q} 分解为拟上三角形形式,如:

$$L_x = H_x D_x, H_x = I - 2vv^T \quad (16)$$

式中: I 为 $n \times n$ 的单位矩阵; v 为单位向量。显然有 $H_x H_x^T = I$ 。公式(15)可化为:

$$H_y^T Z H_x H_x^T D_x^T D_x H_x - H_y^T D_y^T D_y H_y H_y^T Z H_x - H_y^T P H_x - H_y^T Q H_x = 0 \quad (17)$$

不妨设 $W = H_y^T Z H_x, A = L_y^T L_y, B = L_x^T L_x, C = -H_y^T P H_x - H_y^T Q H_x$,公式(17)可化简为:

$$A \times W + W \times B + C = 0 \quad (18)$$

此时 A 和 B 的阶分别为 $m-1$ 和 $n-1$,其第一列和第一行分别全为 0,因此公式(18)可以表示为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & A_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_{00} & W_{01}^T \\ W_{10} & W_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{00} & W_{01}^T \\ W_{10} & W_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & B_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C_{01}^T \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

式中: A_{11} 和 B_{11} 分别是 $m-1$ 和 $n-1$ 的方阵; W_{11} 和 C_{11} 均是 $m-1 \times n-1$ 的矩阵; $0, W_{01}, W_{10}, C_{01}$ 和 C_{10} 均为列向量。显然, 公式(19)可简化为如下方程求解 W :

$$\begin{cases} W_{00}=0 \\ W_{01}^T B_{11} + C_{01}^T = 0 \\ A_{11} W_{10} + C_{10} = 0 \\ A_{11} W_{11} + W_{11} B_{11} + C_{11} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

最终, 求得的重建面形为:

$$Z = H_y W H_x^T \quad (21)$$

3 实验分析

为了将文中提出的紧致差分重建法与已有的算法对比, 将进行如下实验:

- (1) 用理想数据分析算法的计算速度和精度: 重建一个具有解析导数的曲面;
- (2) 用蒙特卡洛仿真分析算法鲁棒性: 在模拟采样斜率上添加正态分布的高斯噪声。

待重建理想曲面采用 Harker、Scherr 等不同研究者使用的两种不同曲面, 如图 1 所示。

从图 1 可以看出, 两种曲面具有不同的特征: Z_1

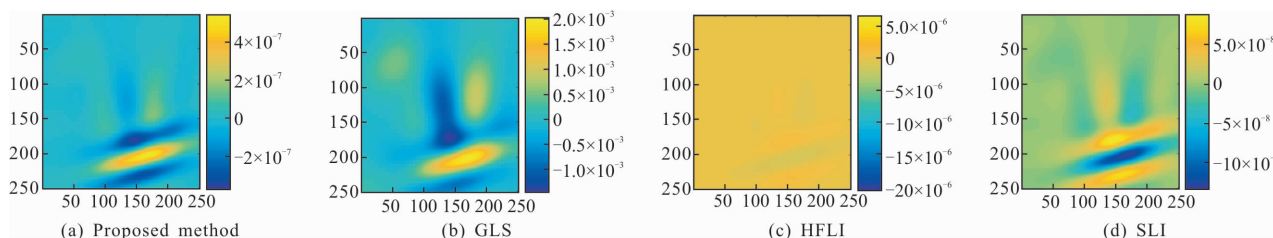


图 2 无噪声干扰时, 重建理想曲面 Z_1 的残差的对比图

Fig.2 Comparison of residual errors for reconstructed surface Z_1 with in the absence of noise

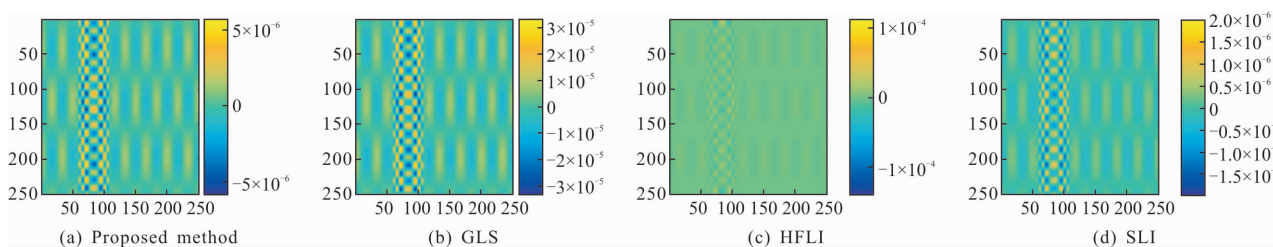


图 3 无噪声干扰时, 重建理想曲面 Z_2 的残差的对比图

Fig.3 Comparison of residual errors for reconstructed surface Z_2 in the absence of noise

是平滑的, 与 MATLAB 的“peaks”曲面有一定相似性, 但非 Dirichlet 边界的特点更明显, Z_2 同时具有局部的和全局的重复结构。

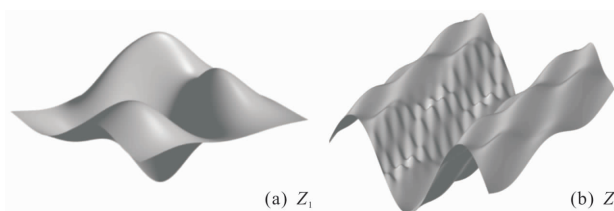


图 1 用于仿真实验的两种不同的曲面

Fig.1 Two different surfaces for simulation experiments

对比算法选择了 HFLI、SLI 和 GLS。选择 HFLI 的原因在于文中提出的紧致差分法和 HFLI 本质上都是利用泰勒展开实现更高阶的差分形式, 不同之处在于 HFLI 基于 Southwell 模型、而文中是基于 Lele 的紧致差分算子; GLS 法与文中都使用了相同的最小二乘求解算法, 但采用了不同的差分算子, 文中对比选用了其精度较高的五点形式; SLI 作为最新算法入选, 使用的是三次样条函数。

若待建面形有 $m \times n$ 个采样点, 算法精度使用重建的曲面 \tilde{Z} 和真值曲面 Z 之间残差的均方根误差 RMSE 来衡量, 定义为:

$$MSE := \min_{\beta} \frac{1}{mn} \|Z - (\tilde{Z} + \beta)\|_2^2, \quad RMSE = \sqrt[3]{MSE} \quad (22)$$

式中: 最小化 β 可以使残差的计算不受积分常数的影响, RMSE 无量纲。图 2、3 和表 1 对比展示了不同

算法的重建精度。

表 1 无噪声干扰时不同面形尺寸下各算法重建误差

Tab.1 RMSE of each method for various surface sizes in the absence of noise

Test surface	(m, n)	RMSE			
		Proposed method	GLS	HFLI	SLI
Z ₁	125,125	9.87×10 ⁻⁸	5.90×10 ⁻⁷	6.96×10 ⁻⁷	2.48×10 ⁻⁸
	250,250	9.87×10 ⁻⁸	5.90×10 ⁻⁷	6.96×10 ⁻⁷	2.48×10 ⁻⁸
	500,500	6.12×10 ⁻⁹	3.67×10 ⁻⁸	5.92×10 ⁻⁸	1.53×10 ⁻⁹
	1000,1000	3.83×10 ⁻¹⁰	2.29×10 ⁻⁹	5.12×10 ⁻⁹	9.52×10 ⁻¹¹
Z ₂	125,125	1.10×10 ⁻⁶	6.43×10 ⁻⁶	4.23×10 ⁻⁶	2.87×10 ⁻⁷
	250,250	1.10×10 ⁻⁶	6.43×10 ⁻⁶	4.23×10 ⁻⁶	2.87×10 ⁻⁷
	500,500	6.68×10 ⁻⁸	4.04×10 ⁻⁷	3.31×10 ⁻⁷	1.71×10 ⁻⁸
	1000,1000	4.21×10 ⁻⁹	2.52×10 ⁻⁸	2.73×10 ⁻⁸	1.06×10 ⁻⁹

从图 2~3 和表 1 可以看出，文中所采用的算法比同阶精度的 HFLI 提高了一个数量级，原因主要在于 HFLI 没有分析其边界条件，简单利用了传统的 SouthWell 模型替代。另一方面，文中算法精度低于 SLI，但若采用六阶紧致差分算子，此时公式(10)分别取 $\alpha=1/3$ 、 $a=14/9$ 、 $b=1/9$ 、 β 、 c 和 d 均为 0，边界仍采用四阶紧致差分算子，重建 250×250 的理想曲面 Z₁ 和 Z₂ 的 RMSE 将分别降低到 4.99×10⁻⁹ 和 6.55×10⁻⁸，比 SLI 约提高了一个数量级。

表 2 展示了将各算法独立重复执行 20 次后统计得到的平均运行时间。程序运行环境为 MATLAB R2016b, CPU 为 2.7 GHz Intel Core i5, 内存为 8 GB。从表 2 可以看出，文中算法的时间效率显著优于 HFLI 和 SLI。

表 2 不同面形尺寸下各算法重建平均时间

Tab.2 Mean reconstruction time of each method for various surface sizes

(m, n)	Computation time/s			
	Proposed method	GLS	HFLI	SLI
250,250	0.08	0.13	0.33	0.49
500,500	0.58	0.69	1.67	2.18
1 000,1 000	5.22	5.72	10.38	11.20

为了测试算法的鲁棒性，在理想梯度场(Z_x, Z_y)上添加了随机的高斯噪声，图 4 展示了不同信噪比(SNR)下的重建效果。图 5 展示了加噪重建实验重复执行 20 次后，不同算法重建鲁棒性的对比。算法鲁棒性采用标准均方根误差 NRMSE 来衡量，定义为：

$$NRMSE = \frac{RMSE}{Z_{max} - Z_{min}} \quad (23)$$

从图 5 可以看出，文中算法鲁棒性优于 GLS，但弱于 HFLI 和 SLI。这是因为 HFLI 和 SLI 的代价函数均采用了公式(1)，文中采用了公式(14)(才可采用 HS 算法降低求解的复杂度)，这牺牲了一定的鲁棒性。但相比同样使用公式(14)的 GLS，紧致差分思想使文中算法鲁棒性优于 GLS(非紧致五点差分格式)。

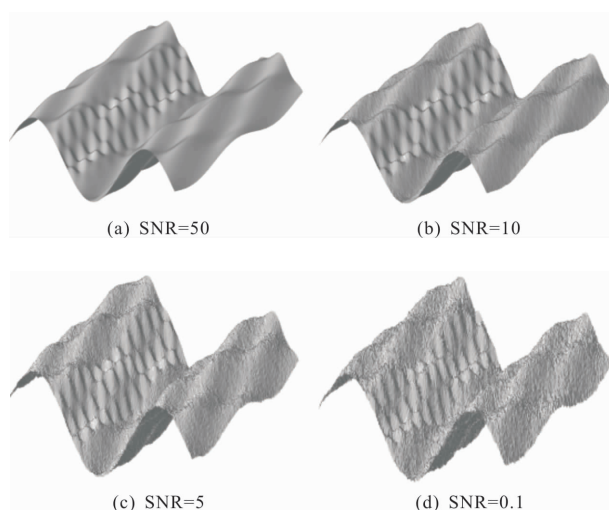


图 4 梯度场具有不同 SNR 的高斯噪声时重建 250×250 的曲面 Z₂ 效果对比

Fig.4 Reconstructions of the 250×250 surface Z₂ with Gaussian noise of different SNR

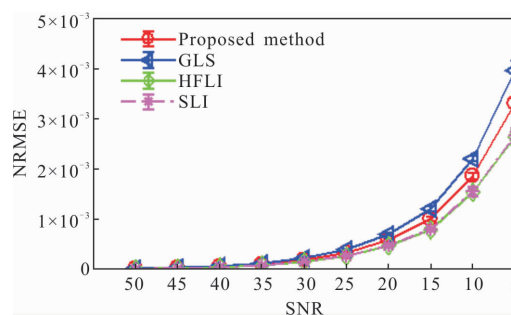


图 5 具有不同 SNR 高斯噪声时重建 250×250 的曲面 Z₂ 误差统计

Fig.5 Reconstruction errors of the 250×250 surface Z₂ for different SNR Gaussian noise levels

另一方面,即使文中算法鲁棒性弱于 HFLI 和 SLI,从图 4 可以看出,即使 SNR 仅为 0.1,文中算法的重建结果中的局部重复结构仍清晰可见。此噪声水平下,目前常用的 Zernike 波前重建技术(采用前 28 项 Zernike 多项式)的 NRMSE 仅为 0.12。因此,文中算法的鲁棒性虽然弱于 HFLI 和 SLI,但仍具有较好的应用价值。

4 结 论

文中提出了一种基于梯度场的最小二乘三维面形重建算法,采用经典的紧致格式建立差分方程以提高精度,将差分方程改写为 Sylvester 方程,利用 HS 算法求解以降低空间和时间复杂度。

算法分析表明:若采用中心型线性五点六阶格式,可实现最高十阶精度;HS 算法实现空间复杂度为 $O(N)$,时间复杂度约 $O(N^{3/2})$ 。

实验结果表明:

(1) 理想状况下,采用四阶精度的紧致差分算子,文中算法重建精度比五点的 GLS 和五阶精度的 HFLI 提高了一个数量级;采用六阶紧致差分算子,文中算法重建精度比 SLI 提高了一个数量级;

(2) 文中算法重建速度显著优于 HFLI 和 SLI,略优于 GLS;

(3) 文中算法鲁棒性优于 GLS,弱于 HFLI 和 SLI。

参 考 文 献:

- [1] Feng Fan, Li Changwei, Zhang Sijiong. Wavefront reconstruction by a defocused Shack-Hartmann sensor based on moment of spot [J]. *Acta Optica Sinica*, 2018 (6): 0628001. (in Chinese)
- [2] Ma Chenhao, Fu Yuegang, He Wenjun, et al. Hartmann-Shack sensor with dual-wedge micro-scanning in wavefront detection technology [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(9): 2813-2818. (in Chinese)
- [3] He Xu, Yuan Li. Wavefront reconstruction based on discrete sampling of sub-aperture slope [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2016, 24(1): 20-29. (in Chinese)
- [4] Nie Er, Hu Xinqi, Dong Bing, et al. Study of phase retrieval algorithm based on hybrid unwrapping under mosaic pupil of regular hexagons[J]. *Optical Technique*, 2018, 44(9): 519-524. (in Chinese)
- [5] Queau Y, Durou J D, Aujol J F. Normal integration: A survey [J]. *Journal of Mathematical Imaging & Vision*, 2018, 60: 576-593.
- [6] Huang L, Idir M, Zuo C, et al. Comparison of two-dimensional integration methods for shape reconstruction from gradient data [J]. *Optics & Lasers in Engineering*, 2015, 64:1-11.
- [7] Southwell W H. Wave-front estimation from wave-front slope measurements [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1980, 70(8): 998-1006.
- [8] Li G, Li Y, Liu K, et al. Improving wavefront reconstruction accuracy by using integration equations with higher-order truncation errors in the Southwell geometry [J]. *Journal of the Optical Society of America A Optics Image Science & Vision*, 2013, 30(7): 1448-1459.
- [9] Huang L, Xue J, Gao B, et al. Spline based least squares integration for two-dimensional shape or wavefront reconstruction[J]. *Optics & Lasers in Engineering*, 2017, 91(4): 221-226.
- [10] Vogel C R, Yang Q. Multigrid algorithm for least-squares wavefront reconstruction[J]. *Appl Opt*, 2006, 45(4): 705-715.
- [11] Harker M, O'Leary P. Regularized reconstruction of a surface from its measured gradient field[J]. *Journal of Mathematical Imaging & Vision*, 2015, 51(1): 1-25.
- [12] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, 103(1): 1642.