红外与激光工程
INFRARED AND LASER ENGINEERING
EI, SCOPUS, CSCD等收录期刊

**冗余旋转惯导系统两位置初始对准方法**

邹涛　王丽芬　任元　朱挺

**Two-position initial alignment method for redundant rotating inertial navigation system**

Zou Tao, Wang Lifen, Ren Yuan, Zhu Ting

在线阅读 View online: https://doi.org/10.3788/IRLA20220414

---

**您可能感兴趣的其他文章**

**Articles you may be interested in**

脉冲飞行时间激光测距系统中周期误差补偿

Periodic error compensation of pulsed time-of-flight laser ranging system

红外与激光工程. 2018, 47(3): 317004　https://doi.org/10.3788/IRLA201847.0317004

基于亚像元坐标的像素频率误差补偿方法

Pixel frequency error compensation method based on sub-pixel coordinates

红外与激光工程. 2017, 46(7): 717006　https://doi.org/10.3788/IRLA201746.0717006

激光三角法高精度测量模型

High accuracy measurement model of laser triangulation method

红外与激光工程. 2018, 47(9): 906008　https://doi.org/10.3788/IRLA201847.0906008

激光陀螺捷联惯导系统的模观测标定方法

Calibration method for the laser gyro strapdown inertial navigation system based on norm-observation

红外与激光工程. 2018, 47(9): 917007　https://doi.org/10.3788/IRLA201847.0917007

旋转望远镜位置域周期性干扰抑制方法

Periodic disturbance suppression method in position domain for rotating telescope

红外与激光工程. 2021, 50(4): 20200296　https://doi.org/10.3788/IRLA20200296

芯片式光谱仪光束耦合与对准监测系统设计

System design for beam coupling and alignment monitoring of chip spectrometer

红外与激光工程. 2020, 49(8): 20190532　https://doi.org/10.3788/IRLA20190532

# 冗余旋转惯导系统两位置初始对准方法

邹 涛，王丽芬*，任 元，朱 挺

(航天工程大学 宇航科学与技术系，北京 101416)

**摘 要：**冗余旋转惯导系统 (Redundant Rotating Inertial Navigation System, RRINS) 可以在传统旋转惯导系统的基础上，进一步提高系统的可靠性。针对该类系统高精度初始对准需求，以正四面体冗余旋转惯导系统为例，研究了两位置初始对准方法。首先以每 3 个陀螺仪和 3 个加速度计构成一种组合方式，建立每种组合下惯性器件的零偏与冗余配置相关的解析表达式，并设计 RRINS 两位置转停方案以估计对应惯性器件的零偏，但是在某些特殊的情况下需要增加观测位置；然后将每个惯性器件在不同组合下得到的结果取均值，并利用该均值对相应惯性器件的测量信息做补偿；最后基于补偿后的惯性器件输出进行 RRINS 的初始对准。数学仿真和实验验证结果表明，该方法在不同两位置方案下均可有效估计出惯性器件的零偏。仿真中陀螺仪的零偏估计误差在 4% 以内，加速度计的零偏估计误差基本在 2% 以内，且相比无零偏补偿的情况，初始对准精度提高 10 倍以上。实验中水平和方位向的初始对准精度都有提高，航向角对准误差最大减小 100 倍左右。同时，该方法还可以推广到其他配置方案的冗余旋转惯导系统中，对该类惯导系统初始对准精度的提高具有一定借鉴意义。

**关键词：**冗余旋转惯导系统； 两位置对准； 误差补偿； 解析对准

**中图分类号：**TH39 **文献标志码：**A **DOI：**10.3788/IRLA20220414

# Two-position initial alignment method for redundant rotating inertial navigation system

Zou Tao，Wang Lifen*，Ren Yuan，Zhu Ting

(Department of Aerospace Science and Technology, Space Engineering University, Beijing 101416, China)

**Abstract:** Redundant Rotating Inertial Navigation System (RRINS) can further improve the reliability of the system on the basis of traditional rotating inertial navigation system. Aiming at the high-precision initial alignment requirements of this type of system, A two-position initial alignment method was studied by taking the regular tetrahedral redundant rotating inertial navigation system as an example. Firstly, every three gyroscopes and three accelerometers constituted a combination. The zero bias correlation and redundancy configuration of the inertial device under each combination were established. And the RRINS two-position stop scheme was designed to estimate the zero bias of the corresponding inertial device. But in some special cases, the observation position needs to be increased. Then, the results obtained by each inertial device under different combinations were averaged, and the average value was used to compensate the measurement information of the corresponding inertial device. Finally, based on the compensated inertial device output performs the initial alignment of the RRINS. Mathematical simulation and experimental verification results show that the method can effectively

**收稿日期:**2022−03−25； **修订日期:**2022−04−27

**作者简介:**邹涛，男，硕士生，主要从事惯性导航系统初始对准方面的研究。

**导师(通讯作者)简介:**王丽芬，女，副教授，博士，主要从事惯性导航方面的研究。

estimate the zero bias of the inertial device under different two-position schemes. In the simulation, the bias estimation error of the gyroscope is within 4%, and the bias estimation error of the accelerometer is basically within 2%. Compared with the case without bias compensation, the initial alignment accuracy is improved by more than 10 times. In the experiment, the initial alignment accuracy in both horizontal and azimuth directions was improved, and the heading angle alignment error was reduced by about 100 times. At the same time, the method can also be extended to redundant rotating inertial navigation systems with other configuration schemes, which has certain reference significance for improving the initial alignment accuracy of such inertial navigation systems.

**Key words:** redundant rotating inertial navigation system; two-position alignment; error compensation; analytic alignment

## 0 引 言

惯导系统因其自主性高、抗干扰能力强并且可以提供丰富的导航参数而被广泛应用于航空、航天、航海和陆用车辆等领域[1]。而其作为保障武器精确打击的核心导航系统的必要前提是可以保证高可靠性和高精度。提高惯导系统的可靠性可以通过冗余配置惯性器件来实现,这种由惯性器件冗余配置而组成的器件级冗余惯导系统已经成为了研究热点[2]。器件级的冗余惯导系统相对于传统的三轴正交配置的惯导系统可以大幅提高系统的可靠性,而其相比于系统级的冗余惯导系统又能在保证可靠性相当的情况下降低成本、减小体积和质量[3]。为了在实现系统高可靠性的同时实现高精度,旋转调制技术可以在惯性器件精度不变的情况下,通过将 IMU 绕单轴或多轴有规律的旋转将惯性器件的误差调制成周期性地变化信号使其相消,从而达到降低系统导航误差累积的目的[4]。

初始对准是惯导系统开始导航的必要前提,其作用是确定载体在初始时刻的姿态和航向,从而建立载体坐标系到导航坐标系 (地理坐标系) 之间的方向余弦阵,初始对准的精度直接影响导航精度。目前,传统的捷联惯导系统初始对准技术已经较为成熟,但是其在静基座下初始对准的可观测性较差,这直接影响了初始对准的快速性和精度[5]。1992 年,Meskin[6] 等提出可在一定条件下通过基座的有目的的机动提高系统的可观测性。1993 年,Lee[7] 等在此基础上首次提出了多位置初始对准方法,并实现了提高捷联惯导系统对准精度的最优二位置对准,获得了较好的效果,随后引发了多位置初始对准的研究热潮。多位置对准技术也可以应用于解析对准,但其只能使用转停状态下的惯性器件输出的数据。谭彩铭[8] 等提出了最简多位置解析对准方法,通过几何方法得到 IMU 偏置的几何解,但是计算方法比较复杂,计算结果受先验信息的影响也比较大。丁磊香[9] 等在最简多位置解析对准方法基础上进行了改进,推导了 IMU 偏置的解析表达式,得到了任意多位置 IMU 偏置的解析解,解析方法计算简单,解决了先前解析式对准方法存在的受先验信息影响较大的问题。

上述关于捷联惯导系统的初始对准方面的研究已经较为成熟,而目前并未查阅到有关冗余旋转惯导系统 (Redundant Rotating Inertial Navigation System, RRINS) 初始对准方面的研究。文中以正四面体冗余旋转惯导系统为例,首先推导了在惯性器件 (3 个陀螺仪和 3 个加速度计) 组合方式下惯性器件的零偏与冗余配置相关的解析表达式,然后利用两位置的测量信息可以求得每个惯性器件的零偏,最后将求得的零偏对惯性器件的测量信息进行补偿后做对准和导航。在理论分析的基础上做了数学仿真和实验,验证了该方法可有效提高 RRINS 的初始对准精度。

## 1 RRINS 两位置初始对准原理与方法

### 1.1 RRINS 测量信息转换模型

以正四面体冗余旋转惯导系统为例进行研究,图 1 所示为正四面体 RRINS 的 IMU 的三维模型图和冗余配置三维示意图。

图 1 中,正四面体配置的冗余 IMU 安装框架是正四面体结构,底面是正三角形,3 个侧面安装面均是等腰三角形,侧面和底面的夹角均为 $\alpha = 70.53°$。

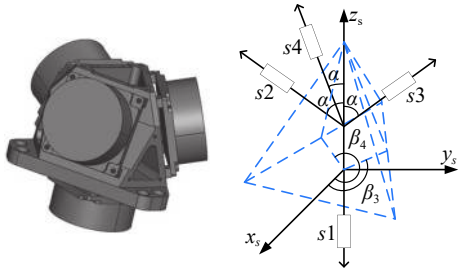



图 1 IMU 的冗余配置图

Fig.1 Redundant configuration of IMU

$s1$ 代表陀螺仪 1 和加速度计 1, $s2$、$s3$、$s4$ 分别代表陀螺仪 2 和加速度计 2、陀螺仪 3 和加速度计 3、陀螺仪 4 和加速度计 4。$s1$ 的测量轴与$oz_s$轴重合，装配于四面体底面，$s2$、$s3$、$s4$ 测量轴与$oz_s$轴的夹角为$\alpha$，分别垂直于 3 个侧面装配，其中 $s2$ 的测量轴位于$x_soz_s$平面，$s3$ 和 $s4$ 的测量轴在$x_soy_s$平面的投影与$ox_s$轴的夹角分别为$\beta_3=120°$, $\beta_4=240°$。其相应的系统冗余配置矩阵为：

$$\boldsymbol{H}_s^r=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_3 & \sin\alpha\sin\beta_3 & \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_4 & \sin\alpha\sin\beta_4 & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{1}$$

惯导系统一般利用 IMU 坐标系 (s 系) 下的 3 个正交轴向的惯性器件测量信息实现导航解算，而冗余 IMU 中惯性器件敏感轴有可能不全在 IMU 坐标系正交轴向上，或者同个轴向上有多个冗余的惯性器件测量信息，因此需要将惯性器件测量信息转换成 IMU 坐标系下 3 个正交轴的等效测量信息。

具体转换方法以陀螺仪敏感角速率信息为例，由 IMU 三轴等效测量信息可计算各个惯性器件的敏感信息，可表示为：

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^r=\boldsymbol{H}_s^r\hat{\boldsymbol{\omega}}^s \tag{2}$$

式中：$\hat{\boldsymbol{\omega}}^r$为 RRINS 各个陀螺仪的输出；$\hat{\boldsymbol{\omega}}^s$为冗余配置下等效三轴的陀螺仪输出；$\boldsymbol{H}_s^r$为冗余 IMU 配置矩阵，表示各个惯性器件在 IMU 中的空间结构。

$\hat{\boldsymbol{\omega}}^r$具体表示如下：

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^r=[\ \hat{\omega}_1^r\quad \hat{\omega}_2^r\quad \hat{\omega}_3^r\quad \hat{\omega}_4^r\ ]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$\hat{\boldsymbol{\omega}}^s$具体表示如下：

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^s=[\ \hat{\omega}_x^s\quad \hat{\omega}_y^s\quad \hat{\omega}_z^s\ ]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

实际使用中为了实现导航解算，可采用最小二乘法将陀螺仪敏感到的角速率$\hat{\boldsymbol{\omega}}^r$转换为 IMU 等效三轴的角速率$\hat{\boldsymbol{\omega}}^s$，由公式 (5) 进行计算：

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^s=\left(\boldsymbol{H}_s^{r\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_s^r\right)^{-1}\boldsymbol{H}_s^{r\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\omega}}^r \tag{5}$$

同理可得：

$$\hat{\boldsymbol{f}}^s=\left(\boldsymbol{H}_s^{r\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_s^r\right)^{-1}\boldsymbol{H}_s^{r\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{f}}^r \tag{6}$$

$$\boldsymbol{a}^s=\left(\boldsymbol{H}_s^{r\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_s^r\right)^{-1}\boldsymbol{H}_s^{r\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^r \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^s=\left(\boldsymbol{H}_s^{r\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_s^r\right)^{-1}\boldsymbol{H}_s^{r\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}^r \tag{8}$$

式中：$\hat{\boldsymbol{f}}^r=[\ \hat{f}_1^r\ \hat{f}_2^r\ \hat{f}_3^r\ \hat{f}_4^r\ ]^{\mathrm{T}}$为 RRINS 各个加速度计的输出；$\hat{\boldsymbol{f}}^s=[\ \hat{f}_x^s\ \hat{f}_y^s\ \hat{f}_z^s\ ]^{\mathrm{T}}$为冗余配置下等效三轴的加速度计输出；$\boldsymbol{a}^r=[\ a_1^r\ a_2^r\ a_3^r\ a_4^r\ ]^{\mathrm{T}}$为 RRINS 各个加速度计的零偏；$\boldsymbol{a}^s=[\ a_x^s\ a_y^s\ a_z^s\ ]^{\mathrm{T}}$为冗余配置下等效三轴的加速度计零偏；$\boldsymbol{\varepsilon}^r=[\ \varepsilon_1^r\ \varepsilon_2^r\ \varepsilon_3^r\ \varepsilon_4^r\ ]^{\mathrm{T}}$为 RRINS 各个陀螺仪的零偏；$\boldsymbol{\varepsilon}^s=[\ \varepsilon_x^s\ \varepsilon_y^s\ \varepsilon_z^s\ ]^{\mathrm{T}}$为冗余配置下等效三轴的陀螺仪零偏。

### 1.2 基于两位置的零偏估计方法

将当地的东北天坐标系作为导航系 (记为 $n$ 系)，初始时刻 IMU 坐标系和载体坐标系固连记为 $s$ 系，$n$~$s$ 系的转换矩阵记为$\boldsymbol{C}_n^s$。地球自转角速度记为$\omega_{ie}$，载体所在位置的纬度记为$L$，载体所在位置的重力加速度记为$g$。若载体处于静止状态，则公式 (9) 成立：

$$\boldsymbol{f}^s=\boldsymbol{C}_n^s\boldsymbol{g}^n,\quad \boldsymbol{\omega}^s=\boldsymbol{C}_n^s\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{f}^s=[\ f_x^s\quad f_y^s\quad f_z^s\ ]^{\mathrm{T}}$为 $\hat{\boldsymbol{f}}^s$的理论值；$\boldsymbol{\omega}^s=[\ \omega_x^s\quad \omega_y^s\quad \omega_z^s\ ]^{\mathrm{T}}$为 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^s$的理论值；$\boldsymbol{g}^n=[\ 0\quad 0\quad -g\ ]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n=[\ 0\quad \omega_{ie}\cos L\quad \omega_{ie}\sin L\ ]^{\mathrm{T}}$。

由公式 (9) 可得：

$$|\boldsymbol{f}^s|=g,\quad |\boldsymbol{\omega}^s|=\omega_{ie},\quad \langle\boldsymbol{f}^s,\boldsymbol{\omega}^s\rangle=g\omega_{ie}\sin L \tag{10}$$

式中：||为取模运算符；⟨⟩为内积运算符。

多位置对准过程中时间比较短，RRINS 的惯性器件的零偏可认为保持不变，并且 RRINS 的误差主要来自于惯性器件的零偏误差，因此在这个过程中只考虑 RRINS 的惯性器件的零偏误差。

则可以得到：

$$\boldsymbol{f}^s=\hat{\boldsymbol{f}}^s-\boldsymbol{a}^s,\quad \boldsymbol{\omega}^s=\hat{\boldsymbol{\omega}}^s-\boldsymbol{\varepsilon}^s \tag{11}$$

将公式 (11) 代入公式 (10) 中可以得到：

$$\begin{gathered}\left|\hat{\boldsymbol{f}}^s-\boldsymbol{a}^s\right|=g,\ \left|\hat{\boldsymbol{\omega}}^s-\boldsymbol{\varepsilon}^s\right|=\omega_{ie}\\ \left\langle\hat{\boldsymbol{f}}^s-\boldsymbol{a}^s,\hat{\boldsymbol{\omega}}^s-\boldsymbol{\varepsilon}^s\right\rangle=g\omega_{ie}\sin L\end{gathered} \tag{12}$$

将同一轴向安装的惯性器件 (1 个陀螺仪和 1 个加速度计) 作为一个惯性器件组，选取 3 个惯性器件组作为一种组合方式。将该组合方式下所选取的惯性器件的测量信息转换至 RRINS 等效三轴正交坐标系上，得到惯性器件的零偏与冗余配置相关的解析表达式。每一种组合都可以估计出选取的惯性器件的零偏，将每种组合下得到的每个惯性器件对应的零偏取平均作为该惯性器件的零偏。对于正四面体冗余旋转惯导系统有 4 个惯性器件组，将其记为：惯性器件组 1(IDG1)、惯性器件组 2(IDG2)、惯性器件组 3(IDG3) 和惯性器件组 4(IDG4)，通过惯性器件组的选择组合产生 4 种组合方式，记为组合方式 1(C1)、组合方式 2(C2)、组合方式 3(C3)、组合方式 4(C4)，具体组合方式如表 1 所示。

**表 1 惯性器件组合方式**

**Tab.1 Inertial device combination**

| | IDG1 | IDG2 | IDG3 | IDG4 |
|---|---|---|---|---|
| C1 | √ | √ | √ | |
| C2 | √ | √ | | √ |
| C3 | √ | | √ | √ |
| C4 | | √ | √ | √ |
| Remark | √ Refers to select this Inertial Device Group (IDG) | | | |

下面以组合 1 为例进行推导 RRINS 的惯性器件的零偏与冗余配置相关的解析表达式。组合 1 的冗余配置矩阵$\boldsymbol{H}_1$可表示为：

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_3 & \sin\alpha\sin\beta_3 & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{13}$$

组合 1 下 RRINS 的各个加速度计的零偏表示为$\boldsymbol{a}^{r1}=\begin{bmatrix} a_1^{r1} & a_2^{r1} & a_3^{r1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，等效三轴的加速度计零偏表示为$\boldsymbol{a}^{s1}=\begin{bmatrix} a_x^{s1} & a_y^{s1} & a_z^{s1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；RRINS 的各个陀螺仪的零偏表示为$\boldsymbol{\varepsilon}^{r1}=\begin{bmatrix} \varepsilon_1^{r1} & \varepsilon_2^{r1} & \varepsilon_3^{r1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，等效三轴的陀螺仪零偏表示为$\boldsymbol{\varepsilon}^{s1}=\begin{bmatrix} \varepsilon_x^{s1} & \varepsilon_y^{s1} & \varepsilon_z^{s1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；RRINS 的各个加速度的输出表示为$\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}=\begin{bmatrix} \hat{f}_1^{r1} & \hat{f}_2^{r1} & \hat{f}_3^{r1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，等效三轴的加速度计输出表示为$\hat{\boldsymbol{f}}^{s1}=\begin{bmatrix} \hat{f}_x^{s1} & \hat{f}_y^{s1} & \hat{f}_z^{s1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；RRINS 的各个陀螺仪的输出表示为$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}=\begin{bmatrix} \hat{\omega}_1^{r1} & \hat{\omega}_2^{r1} & \hat{\omega}_3^{r1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，等效三轴的陀螺仪输出表示为$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{s1}=\begin{bmatrix} \hat{\omega}_x^{s1} & \hat{\omega}_y^{s1} & \hat{\omega}_z^{s1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。$\boldsymbol{f}^{s1}$是$\hat{\boldsymbol{f}}^{s1}$的真实值，$\boldsymbol{\omega}^{s1}$是$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}$的真实值。

则由公式 (11) 可得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}^{s1}&=\hat{\boldsymbol{f}}^{s1}-\boldsymbol{a}^{s1}=(\boldsymbol{H}_1)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}-\boldsymbol{a}^{r1}\right) \\ \boldsymbol{\omega}^{s1}&=\hat{\boldsymbol{\omega}}^{s1}-\boldsymbol{\varepsilon}^{s1}=(\boldsymbol{H}_1)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}-\boldsymbol{\varepsilon}^{r1}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

再由公式 (12) 可得：

$$\left[(\boldsymbol{H}_1)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}-\boldsymbol{a}^{r1}\right)\right]^{\mathrm{T}}\left[(\boldsymbol{H}_1)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}-\boldsymbol{a}^{r1}\right)\right]=g^2 \tag{15}$$

$$\left[(\boldsymbol{H}_1)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}-\boldsymbol{\varepsilon}^{r1}\right)\right]^{\mathrm{T}}\left[(\boldsymbol{H}_1)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}-\boldsymbol{\varepsilon}^{r1}\right)\right]=\omega_{ie}^2 \tag{16}$$

$$\left[(\boldsymbol{H}_1)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}-\boldsymbol{a}^{r1}\right)\right]^{\mathrm{T}}\left[(\boldsymbol{H}_1)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}-\boldsymbol{\varepsilon}^{r1}\right)\right]=g\omega_{ie}\sin L \tag{17}$$

将公式 (15) 展开可得：

$$\left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}-\boldsymbol{a}^{r1}\right)^{\mathrm{T}}\left((\boldsymbol{H}_1)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_1)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}-\boldsymbol{a}^{r1}\right)=g^2 \tag{18}$$

令$\left((\boldsymbol{H}_1)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_1)^{-1}=\boldsymbol{K}$，化简并且忽略二阶小项可得：

$$\left[\left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K})\right]\boldsymbol{a}^{r1}=\left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}-g^2 \tag{19}$$

同理，公式 (16) 展开化简并忽略二阶小项可得：

$$\left[\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K})\right]\boldsymbol{\varepsilon}^{r1}=\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}-\omega_{ie}^2 \tag{20}$$

将公式 (17) 展开化简并忽略二阶小项可得：

$$\left[\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{a}^{r1}+\left[\left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{\varepsilon}^{r1}=\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}-g\omega_{ie}\sin L \tag{21}$$

把公式 (19)~(21) 写成矩阵的形式，可得：

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{r1} & \boldsymbol{\varepsilon}^{r1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B} \tag{22}$$

其中 $A$ 和 $B$ 分别表示为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}) & 0 \\ 0 & (\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}) \\ (\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} & \left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \left(\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}-g^2 \\ (\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1}-\omega_{ie}^2 \\ (\hat{\boldsymbol{\omega}}^{r1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{f}}^{r1}-g\omega_{ie}\sin L \end{bmatrix} \tag{24}$$

公式 (22) 就是组合 1 的 RRINS 的惯性器件的零偏与冗余配置相关的解析表达式，其他组合也可以得到类似的解析表达式。可以看出表达式是 3 个方程但是有 6 个未知量，所以需要两个位置来构造出 6 个方程。$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$中的参数都是可以测量得到或者是已知的，所以通过解方程就可以得到 RRINS 的惯性器件

的零偏。

需要特别注意的是在两位置下构造出的 6 个六元一次方程组的系数矩阵必须满足满秩，否则无法利用该方法求出惯性器件的零偏。系数矩阵不满秩的其中一种情况有两个位置的横滚角和俯仰角都为零，这种情况下只需要增加一个观测位置就可以解决，即可求出惯性器件的零偏。

### 1.3 基于误差补偿的解析粗对准

首先将求取到的 RRINS 的惯性器件的零偏对惯性器件的测量信息进行补偿；然后利用补偿后的测量信息进行 RRINS 的粗对准。静基座下粗对准可由公式 (25) 求出姿态转移矩阵$\boldsymbol{C}_s^n$：

$$\boldsymbol{C}_s^n=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{g}^n)^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{g}^n\times\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{g}^s)^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{\omega}_{ie}^s)^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{g}^s\times\boldsymbol{\omega}_{ie}^s)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sec L}{g\omega_{ie}}\left(\omega_{iez}^s g_y^s-\omega_{iey}^s g_z^s\right) & \frac{\sec L}{g\omega_{ie}}\left(\omega_{iex}^s g_z^s-\omega_{iez}^s g_x^s\right) & \frac{\sec L}{g\omega_{ie}}\left(\omega_{iey}^s g_x^s-\omega_{iex}^s g_y^s\right)\\ \frac{g_x^s}{g}\tan L+\frac{\omega_{iex}^s}{\omega_{ie}}\sec L & \frac{g_y^s}{g}\tan L+\frac{\omega_{iey}^s}{\omega_{ie}}\sec L & \frac{g_z^s}{g}\tan L+\frac{\omega_{iez}^s}{\omega_{ie}}\sec L\\ -\frac{g_x^s}{g} & -\frac{g_y^s}{g} & -\frac{g_z^s}{g}\end{bmatrix}\tag{25}$$

$\boldsymbol{g}^n$与$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$是当地的重力加速度$\boldsymbol{g}$和地球自转角速度$\boldsymbol{\omega}_{ie}$在导航系的分量 (这里取地理坐标系为导航坐标系)。

$$\boldsymbol{g}^s=\boldsymbol{C}_n^s\boldsymbol{g}^n,\quad \boldsymbol{\omega}_{ie}^s=\boldsymbol{C}_n^s\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\tag{26}$$

$$\boldsymbol{g}^n=\begin{bmatrix}g_x\\g_y\\g_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-g\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\omega}_{ie}^n=\begin{bmatrix}\omega_{iex}^n\\\omega_{iey}^n\\\omega_{iez}^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\omega_{ie}\cos L\\\omega_{ie}\sin L\end{bmatrix}\tag{27}$$

公式 (25) 中，载体系下的地球重力加速度矢量$\boldsymbol{g}^s=\begin{bmatrix}g_x^s & g_y^s & g_z^s\end{bmatrix}$和地球自转角速度矢量$\boldsymbol{\omega}_{ie}^s=\begin{bmatrix}\omega_{iex}^s & \omega_{iey}^s & \omega_{iez}^s\end{bmatrix}$可以由 RRINS 的惯性器件的输出等效到三轴后取平均由$\hat{\boldsymbol{f}}^s=\begin{bmatrix}\hat{f}_x^s & \hat{f}_y^s & \hat{f}_z^s\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$和$\hat{\boldsymbol{\omega}}^s=\begin{bmatrix}\hat{\omega}_x^s & \hat{\omega}_y^s & \hat{\omega}_z^s\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$来近似代替。另外通过当地的地理位置可以精确地求出在导航坐标系下的当地重力加速度$\boldsymbol{g}^n$及地球自转角速度$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$。

## 2 数学仿真

### 2.1 RRINS 零偏估计仿真

仿真选取三组位置来验证算法的有效性，三组位置的设置基于三点考虑并对应于三组位置。一是位置比较随机对应于如表 2 中的 Group1，这个随机的位置需要精密的三轴转台来实现；二是选取的位置可以在双轴转位机构上实现，位置选取如表 2 中的 Group2；三是转动的角度选择常规的 90°，选取的位置如表 2 中的 Group3。表 2 中，$\gamma_k$、$\theta_k$和$\psi_k$分别表示第$k(k=1,2)$个位置处的横滚角、俯仰角和航向角。

仿真的相关参数如下：

$$g=9.8\ \mathrm{m/s^2},\quad \omega_{ie}=15.041\ (^\circ)/\mathrm{h},\quad L=40^\circ$$

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\times10^{-4}g$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0.01 & 0.02 & 0.03 & 0.04\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}(^\circ)/\mathrm{h}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{a_1} & \sigma_{a_2} & \sigma_{a_3} & \sigma_{a_4}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}5 & 5 & 5 & 5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\times10^{-5}g\begin{bmatrix}\sigma_{\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_2} & \sigma_{\varepsilon_3} & \sigma_{\varepsilon_4}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}5 & 5 & 5 & 5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\times10^{-3}(^\circ)/\mathrm{h}$$

仿真参数中，$g$表示重力加速度，$\omega_{ie}$表示地球自转角速度，$L$表示纬度，$\boldsymbol{a}_t$和$\boldsymbol{\varepsilon}_t(t=1,2,3,4)$分别表示加速度计和陀螺仪的零偏，$\boldsymbol{\sigma}_a$和$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$分别表示加速度计和陀螺仪的测量白噪声。

三组位置组合中每组组合的两个位置都仿真 1 min 的数据然后取平均，仿真计算得到的 RRINS 的惯性器件的零偏如表 3 所示。

通过选取的三组位置计算得到的结果可以看出，RRINS 的惯性器件的零偏可以被较好的估计出来，整个过程在 2 min 之内就可以完成。但是也存在由于测量噪声和忽略二阶小项时产生的计算误差，陀螺仪的零偏估计误差在 4% 以内，加速度计的零偏估计误差基本在 2% 以内。

**表 2 三组位置组合**

**Tab.2 Three position combinations**

| | Position1 | Position2 |
|---|---|---|
| | $\begin{bmatrix}\gamma_1 & \theta_1 & \psi_1\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}\gamma_2 & \theta_2 & \psi_2\end{bmatrix}$ |
| Group1 | [30° 75° 90°] | [20° 295° 90°] |
| Group2 | [0° 0° 0°] | [0° 5° 90°] |
| Group3 | [0° 0° 0°] | [90° 0° 90°] |

表 3 RRINS 惯性器件的零偏仿真估计结果

Tab.3 Zero bias simulation results of inertial devices of RRINS

| Zero bias of gyro/(°)·h$^{-1}$ | | | | | Zero bias of accelerometer/10$^{-4}g$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Theoretical value | Value of calculation | | | | Theoretical value | Value of calculation | | |
| | | Group1 | Group2 | Group3 | | | Group1 | Group2 | Group3 |
| Gyro1 | 0.01 | 0.0100 | 0.0100 | 0.0099 | Accelerometer1 | 1 | 1.0196 | 1.0010 | 1.0005 |
| Gyro2 | 0.02 | 0.0202 | 0.0202 | 0.0201 | Accelerometer2 | 2 | 2.0019 | 2.0061 | 2.0029 |
| Gyro3 | 0.03 | 0.0299 | 0.0297 | 0.0296 | Accelerometer3 | 3 | 2.9995 | 3.0023 | 2.8358 |
| Gyro4 | 0.04 | 0.0399 | 0.0401 | 0.0404 | Accelerometer4 | 4 | 3.9970 | 3.9937 | 4.1755 |

## 2.2 初始对准仿真

在 RRINS 零偏估计仿真的基础上进行初始对准的仿真，仿真的相关参数和冗余旋转惯导系统零偏估计仿真参数一致。为了验证方法的正确性，初始对准仿真选取 8 个随机位置来进行验证，每个位置仿真 3 min，8 个位置具体如表 4 所示。

首先，将仿真出的每个位置的原始数据进行粗对准，然后分别用 RRINS 零偏估计仿真估计出的三组零偏对原始数据进行补偿，数据补偿后再进行粗对准。分别将 8 个位置原始数据粗对准的值及三组数据补偿后粗对准的值和表 4 中的真实值做差作为粗对准的误差。将原始数据粗对准的误差和三组数据补偿后粗对准的误差作比较，如图 2 所示。

图 2(a)~(c) 分别为横滚角、俯仰角和航向角的粗对准误差比较，其中 original data 曲线代表原始数据粗对准的误差；After calibration 1, After calibration 2, After calibration 3 分别代表用 RRINS 零偏估计仿真中 Group1, Group2, Group3、估计出的 RRINS 的惯性器件的零偏补偿后的粗对准误差。

由图 2(a) 可以看出，原始数据横滚角的粗对准误差在 0.016°以内，数据补偿后横滚角的粗对准误差在 0.0002°以内，数据补偿后横滚角粗对准误差减小 100 倍左右。由图 2(b) 可以看出，原始数据俯仰角的粗对准误差在 0.012°以内，数据补偿后俯仰角的粗对准误差在 0.0012°以内，数据补偿后俯仰角对准误差减小 10 倍。图 2(b) 中看出 Group3 估计出的零偏补偿后俯仰角的对准误差相对 Group1 和 Group2 估计出的零偏补偿后的对准误差稍大，最大误差在 0.0012°，但是也在仿真中所给的器件噪声所导致的对准误差允许的波动范围内。由图 2(c) 可以看出，原始数据航向角的粗对准误差在 0.11°以内，数据补偿后航向角的粗对准误差在 0.0012°以内，数据补偿后航向角对准误差减小 100 倍左右。初始对准的仿真结果表明文中基于两位置对准的冗余旋转惯导系统零偏估计的方法是有效的。

表 4 初始对准仿真位置

Tab.4 Simulation position of initial alignment

| Position | Roll/(°) | Pitch/(°) | Heading/(°) |
|---|---|---|---|
| Position1 | 30 | 75 | 90 |
| Position2 | 20 | −65 | 80 |
| Position3 | 0 | 0 | 0 |
| Position4 | 160 | 20 | 80 |
| Position5 | 0 | 5 | 90 |
| Position6 | 90 | 0 | 90 |
| Position7 | 20 | 80 | 80 |
| Position8 | 0 | 0 | 90 |

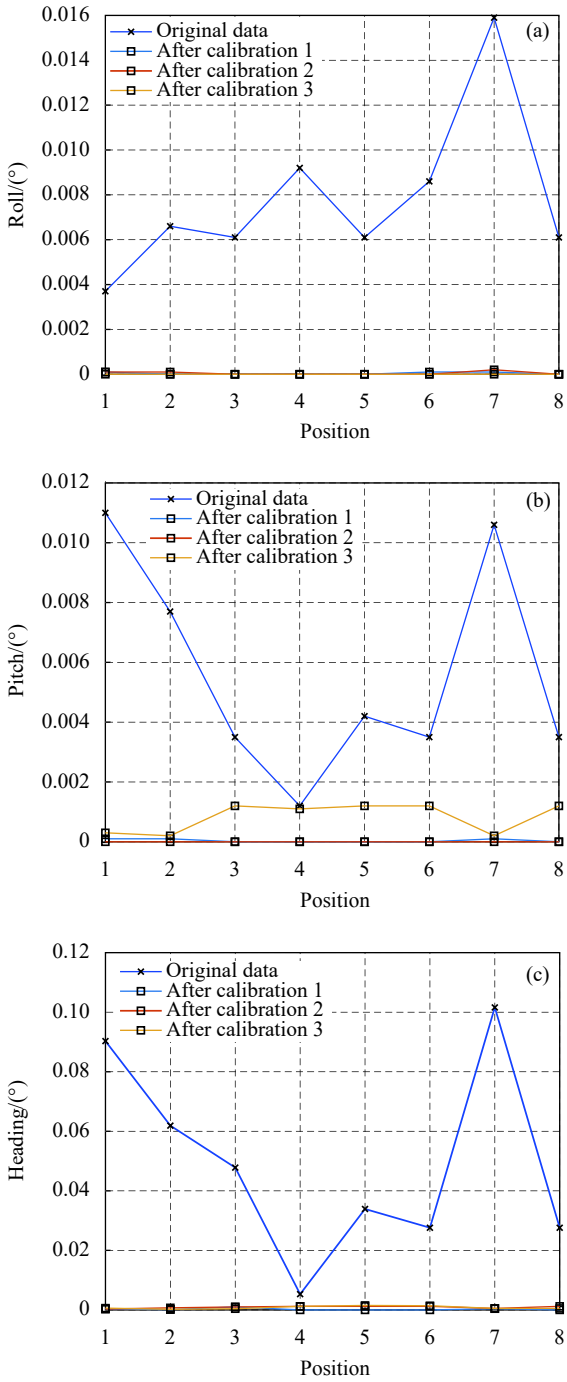



图 2 (a) 横滚角粗对准仿真误差; (b) 俯仰角粗对准仿真误差; (c) 航向角粗对准仿真误差

Fig.2 (a) Coarse alignment simulation error of roll; (b) Coarse alignment simulation error of pitch; (c) Coarse alignment simulation error of heading

## 3 实验验证

### 3.1 RRINS 零偏估计实验

在仿真的基础上，将正四面体冗余惯性测量单元 (Redundant Inertial Measurement Unit, RIMU) 放置于三轴转台上进行实验，实验设备及环境如图 3 所示。

图 3 实验设备及环境

Fig.3 Experimental equipment and environment

正四面体 RIMU 装配的是型号为 ZKDK70 MA 的光纤陀螺仪和型号为 JSD-I/B 的石英挠性加速度计，具体技术参数如表 5 所示。实验中选取的三组位置和 RRINS 零偏估计仿真中选取的三组位置相同 (表 2)。每一组的两个位置分别采集 1 min 的数据。这样就可以计算得到三组不同位置下估计出的 RRINS 的惯性器件的零偏。

**表 5 实验 RIMU 的参数**

**Tab.5 Parameters of the experimental RIMU**

| Parameter | Gyro/(°)·h$^{-1}$ | Accelerometer |
|---|---|---|
| Bias | −10 - +10 | ≤3 mg |
| Bias stability | ≤0.1 | 50 μg |

### 3.2 初始对准实验

初始对准实验选取的位置和初始对准仿真选取的 8 个位置相同 (表 4)，每个位置采集静态 3 min 的数据。首先将采集到的每个位置的原始数据进行粗对准，然后用 RRINS 零偏估计实验中估计出的三组零偏分别对 8 个位置的原始数据进行补偿做粗对准。将 8 个位置的原始数据进行粗对准的值和真实值的差值作为原始数据粗对准的误差，将 8 个位置的数据分别用三组零偏补偿后进行粗对准的值和真实值的差值作为三组数据补偿后粗对准的误差。

图 4(a)、(b)、(c) 所示分别是横滚角、俯仰角和航向角的粗对准误差比较。其中 Original data, After calibration 1, After calibration 2 和 After calibration 3 与初始对准仿真中所指代含义的不同点只在于其数据

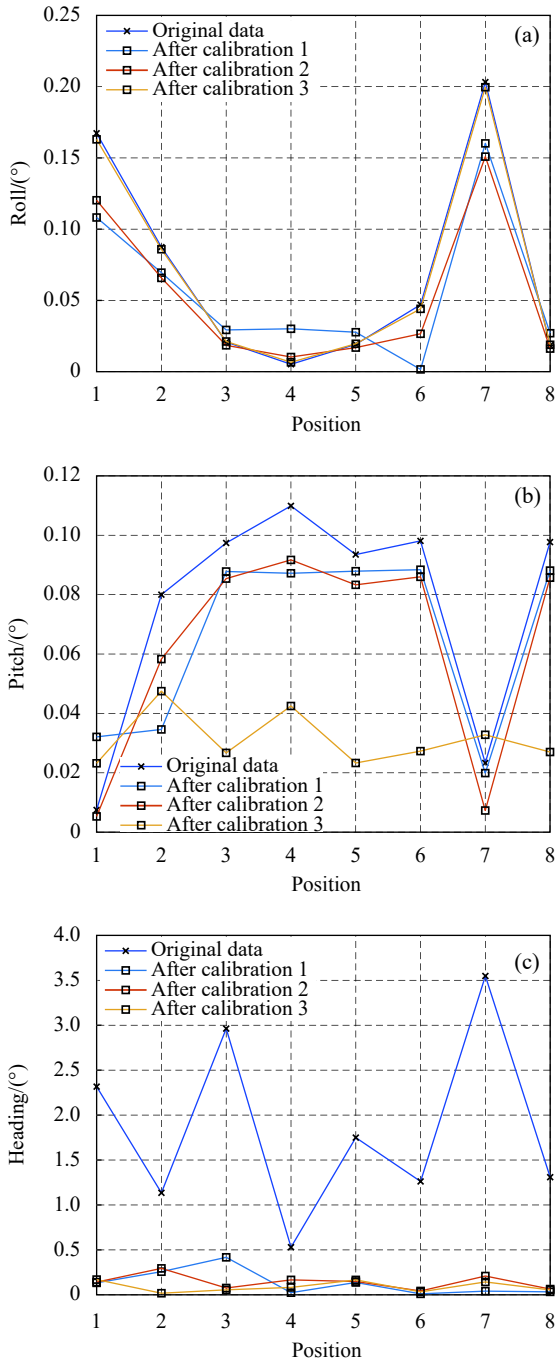



图 4 (a) 横滚角粗对准实验误差; (b) 俯仰角粗对准实验误差; (c) 航向角粗对准实验误差

Fig.4 (a) Coarse alignment experimental error of roll; (b) Coarse alignment experimental error of pitch; (c) Coarse alignment experimental error of heading

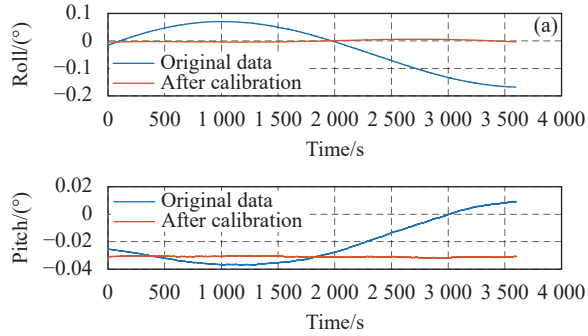
补偿的零偏是 RRINS 零偏估计实验中得到的三组零偏，而非仿真计算出的零偏。

从图 4(a) 和图 4(b) 可以看出，数据补偿后横滚角和俯仰角的粗对准误差相比于未补偿数据的粗对准误差基本都有减小。未补偿数据粗对准误差和数据补偿后粗对准误差进行比较，其中横滚角误差减小幅度最大的从 0.1673°减小到 0.1082°，减小了 0.0591°；俯仰角误差减小幅度最大的从 0.0981°减小到 0.0328°，减小了 0.0708°。从图 4(c) 可以看出，未补偿数据航向角对准误差和数据补偿后航向角对准误差进行比较，减小幅度最大的从 3.5482°减小到 0.041°，减小了 3.5072°，对准误差减小 100 倍左右。由于实验存在器件的随机噪声比较大；图 4(b) 中，三组位置估计出的零偏补偿后的对准误差出现一定的偏差波动也都是在噪声引起的对准偏差范围内的。综上，初始对准实验结果验证了基于两位置对准的冗余旋转惯导系统零偏估计方法的有效性。

### 3.3 静基座导航实验

初始对准后将冗余惯导系统放置于转台上连续采集 1 h 的静态数据，对采集的 1 h 的原始数据进行导航解算，另外用 RRINS 零偏估计实验中三组位置估计出的零偏分别对 1 h 原始数据补偿后的姿态、速度和位置变化进行解算。将三组位置估计出的零偏中的一组零偏对原始数据补偿后导航解算的姿态、速度和位置误差与原始数据的导航误差进行比较，结果如图 5(a)~(c) 所示。

从图 5(a) 可以看出，补偿后的 RRINS 的导航解算姿态的精度和稳定性都有提高。从图 5(b) 可以看出，原始数据解算出的东向速度和北向速度出现了很大的偏移，而数据补偿后解算出的结果的稳定性更好，并且精度有很大的提升。如图 5(c) 所示，进行 1 h 的导航，数据补偿后解算的纬度误差从 0.1127°降低至 0.0041°，经度误差从 0.9374°降低至 0.0633°。实验结果表明，数据补偿后，导航的精度和稳定性得到了有效的提升。



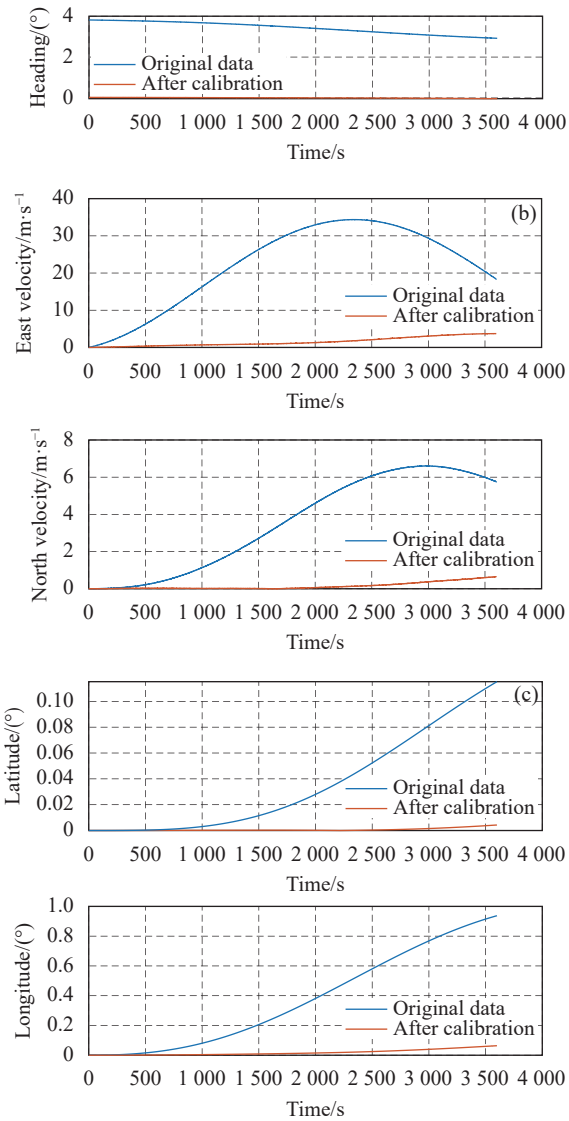



图 5 (a) 导航解算姿态误差; (b) 导航解算速度误差; (c) 导航解算位置误差

Fig.5 (a) Attitude error of navigation solution; (b) Velocity error of navigation solution ; (c) Position error of navigation solution

## 4 结 论

文中对冗余旋转惯导系统的两位置初始对准方法进行研究。首先通过惯性器件组合的方式构造不同组合下 RRINS 的零偏估计解析表达式，然后设计不同的 RRINS 两位置方式估计惯性器件的零偏，并基于每个惯性器件在不同组合下估计的零偏的均值补偿惯性器件输出，进行 RRINS 的初始对准。文中的两位置方案不要求转位机构必须严格旋转 90°或 180°，因此转位设计具有一定的普适性，并且整个零偏估计可以在 2 min 之内完成。仿真结果表明，该方法对陀螺仪的零偏估计误差在 4% 以内，加速度计的零偏估计误差基本在 2% 以内；横滚角的对准误差由 0.016°减小到 0.0002°，俯仰角的对准误差由 0.012°减小到 0.0012°，航向角的对准误差由 0.11°减小到 0.0012°。初始对准和静基座导航的实验结果表明该方法可有效提高初始对准的精度和导航精度，其中航向角的对准精度提高近 100 倍，纬度误差从 0.1127°降低至 0.0041°，经度误差从 0.9374°降低至 0.0633°。初始对准实验中少数位置零偏补偿后横滚角和俯仰角对准效果略不佳的原因有待进一步研究。该方法以正四面体冗余旋转惯导系统为例进行分析验证，同样也适用于其他冗余配置的旋转惯导系统，为冗余旋转惯导系统的高精度初始对准方法的研究提供了一定的参考。

**参考文献：**

[1] Zhang Q, Hu Y, Li S, et al. Mounting parameter estimation from velocity vector observations for land vehicle navigation [J]. ***IEEE Transactions on Industrial Electronics***, 2021, 29(6): 4234-4244.

[2] Zhai X R, Ren Y, Wang L F, et al. A review of redundant inertial navigation technology [C]//2021 International Conference on Computer, Control and Robotics (ICCCR), 2021: 272-278.

[3] Li B, Wang H, Mu L, et al. A configuration design method for a redundant inertial navigation system based on diagnosability analysis [J]. ***Measurement Science and Technology***, 2020, 32(2): 025111.

[4] Zhu Ting, Wang Lifen, Wang Yongrang, et al. Carrier angular motion isolation and modulation method of dual-axis rotation inertial navigation system [J]. ***Chinese Journal of Scientific Instrument***, 2020, 41(12): 66-75. (in Chinese)

[5] Frutuoso A, Silva F O, de Barros E A. Influence of integration schemes and maneuvers on the initial alignment and calibration of AUVs: Observability and degree of observability analyses [J]. ***Sensors***, 2022, 22(9): 3287.

[6] Goshen-Meskin D, Bar-It zhack I Y. Observability analysis of piece-wise constant systems – part I: Theory [J]. ***IEEE Trans of Aerospace and Electronic Systems***, 1992, 28(4): 1056-1067.

[7] Lee J G, Park C, Park H. Multiposition alignment of strapdown inertial navigation system [J]. ***IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems***, 1993, 29(4): 1323-1328.

[8] Tan Caiming, Wang Yu, Su Yan, et al. The simplest multi-position analytic alignment for SINS [J]. ***Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics***, 2015, 41(9): 1645-1650. (in Chinese)

[9] Ding Leixiang, Xu Houze, Wang Yong, et al. Improved algorithm of the simplest multi-position analytic aligenment for SINS [J]. ***Journal of Chinese Inertial Technology***, 2016, 24(3): 296-298. (in Chinese)